Notas de curso

Disciplina: INTEGRAL E APLICAÇÕES

Licenciatura em Matemática · 3.º ano · Ciências ULisboa

Integral de Lebesgue

e Teoria da Medida

Nicolas Van Goethem

Teoria da Medida, Integração e Análise Funcional

Conteúdo

Introdução **1**

0.1 Uma teoria, várias construções 1

0.2 O fio condutor destas notas 1

0.3 Princípios orientadores 2

0.4 Organização das notas 3

I Fundamentos da Análise Matemática **5**

1 Axioma da escolha dependente **7**

1.1 O axioma da escolha dependente 7

1.2 A analogia dos pares de meias 8

1.3 O labirinto infinito 8

1.4 O teorema da categoria de Baire 9

2 Noções Fundamentais de Topologia **10**

2.1 Espaços topológicos 10

2.2 Aplicações contínuas 11

2.3 Recobrimentos e compacidade 12

2.4 Espaços vetoriais 13

2.5 Espaços vetoriais topológicos 14

2.6 Sucessões de Cauchy 14

2.7 Outras noções topológicas 15

2.8 Espaços de Hausdorff 16

2.9 Exaustão por compactos 17

2.10 Paracompacidade e partições da unidade 18

2.11 Espaços métricos 20

2.12 Supremo, ínfimo e semicontinuidade 23

2.12.1 Supremo e ínfimo 23
2.12.2 Limites superior e inferior de sucessões 25
2.12.3 Semicontinuidade 26

3 Espaços duais **29**
3.1 Normas e espaços normados 29
3.2 Aplicações contínuas 30
3.2.1 Principais espaços de aplicações 31
3.2.2 Norma do supremo 32
3.2.3 O espaço $\mathcal{C}_c(X)$ 33
3.2.4 O espaço $\mathcal{C}_0(X)$ 33
3.2.5 Teorema de Heine–Cantor 34
3.2.6 Completude 34
3.3 Partes positivas e negativas de uma função 35
3.4 Aplicações aditivas e limitadas; aplicações lineares e contínuas 37
3.4.1 Aplicações aditivas 37
3.4.2 Aplicações limitadas 37
3.4.3 Aplicações lineares e contínuas 38
3.4.4 Núcleo de uma forma linear 39
3.5 O espaço dual normado 40
3.5.1 Exemplos de funcionais lineares contínuos 42
3.6 Convergência de aplicações 45
3.7 Funcionais positivos em $\mathcal{C}_0(X)$ e construção da medida 46
3.7.1 Funcionais positivos 46
3.7.2 Construção da parte positiva 47
3.7.3 Decomposição de Jordan 48
3.7.4 Medida (exterior) associada a um funcional positivo 49

4 Integral de Riemann **52**
4.1 Integral de Riemann a 1d 52
4.2 Extensão do intervalo de integração 60
4.3 Integral de Riemann imprópria 63
4.4 Critério de Lebesgue 64
4.5 Teorema fundamental do cálculo 67
4.6 Integral de Riemann em $\mathbb{R}^d$ 68
4.6.1 Propriedades fundamentais 69

4.7 Teorema de Fubini 70
4.8 Séries absolutamente convergentes e rearranjos 71
4.8.1 Séries condicionalmente e absolutamente convergentes 71
4.8.2 Séries absolutamente convergentes e rearranjos 72
4.8.3 Teorema de Riemann sobre rearranjos 73
4.9 Variação total de funções 76
4.9.1 Decomposição de Jordan 77

II A Construção Funcional da Integral de Lebesgue 79

5 A construção de Daniell da integral de Lebesgue 81
5.1 A integral de Riemann como ponto de partida 81
5.2 Integral elementar 82
5.3 Classes de funções integráveis 83
5.4 Integral elementar no sentido de Daniell 84
5.5 Sucessões fundamentais, classe $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ e conjuntos desprezáveis 85
5.6 Convergência monótona e relação de ordem em $\mathcal{L}(\Omega)$ 87
5.7 Integral de Lebesgue em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ 88
5.8 Convergência monótona em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ 90

6 Espaço $\mathcal{L}^1$ 92
6.1 Teorema de Levi 94
6.2 Lema de Fatou 95
6.3 Teorema da convergência dominada 96
6.4 Teorema da comparação 98
6.5 Funções mensuráveis 99
6.6 Conjuntos mensuráveis 103
6.7 Integrais múltiplas 105
6.7.1 Integral de Lebesgue múltipla 105
6.7.2 Conjuntos desprezáveis 107
6.7.3 Teorema de Fubini 107
6.7.4 Teorema de Tonelli 108

7 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e funções mensuráveis 111
7.1 Construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ 111
7.2 Conjuntos de nível e princípio de Cavalieri 112

7.3 Regularidade e conjuntos desprezáveis 114
7.3.1 Regularidade da medida de Lebesgue 114
7.3.2 Conjuntos desprezáveis pela medida de Lebesgue 115
7.4 Medida positiva 118
7.4.1 A propriedade de truncamento 121

8 Espaços L^p 122
8.1 Convexidade e desigualdades notáveis 122
8.1.1 Definições e propriedades básicas 122
8.1.2 Desigualdade de convexidade 124
8.1.3 Desigualdades de Hölder, Minkowski e Hanner 125
8.2 Convergência e completude dos espaços normados L^p 128
8.2.1 Definição e propriedades básicas 129
8.2.2 Estrutura normada 129
8.2.3 Convergência em L^p 130
8.2.4 Completude de L^p 130
8.2.5 Convergência em L^p e convergência quase em toda a parte 131
8.2.6 Convergência em L^p e passagem ao limite na integral 132
8.3 Densidade e separabilidade em L^p 132
8.3.1 Construção de uma partição da unidade 132
8.3.2 Bases numeráveis em $\mathcal{C}_0(\Omega)$ 133
8.3.3 Densidade de $\mathcal{L}$ em L^p 134
8.4 Separabilidade de $L^p(\Omega)$ 134

9 Teoremas Fundamentais da Análise Funcional 137
9.1 Teorema de Banach–Steinhaus 137
9.2 Convexidade uniforme e reflexividade 139
9.3 Teorema de Hahn–Banach 142

10 Dualidade e aproximação nos espaços L^p 147
10.1 Dualidade em espaços L^p 147
10.2 Espaço $L^\infty(\Omega, \mu)$ 149
10.3 Continuidade das translações 152
10.4 Aproximação por molificadores 153

11 Convergências fraca e fraca-* 156
11.1 Definições e propriedades 156

11.2 Exemplos de convergência fraca e fraca-* . . . 157
11.3 Convergência em subconjuntos densos . . . 158
11.4 Teorema de Banach (Banach–Alaoglu sequencial) . . . 159
11.5 Dualidade e convergência fraca em L^p . . . 160
11.5.1 Convergência fraca em $L^p(\Omega, \mu)$ . . . 162
11.6 Contraexemplos e fenómenos de convergência fraca . . . 163
11.6.1 Falta de compacidade fraca em L^1 . . . 163
11.6.2 Oscilação, concentração e translação . . . 164
11.6.3 Teorema de Mazur . . . 166
11.7 Topologias fracas . . . 167
11.7.1 Teorema de Banach–Alaoglu . . . 169
11.7.2 Convergência fraca e forte . . . 169
11.8 Medidas de Radon . . . 170
11.8.1 Extensão a $\mathcal{C}_0$ . . . 171
11.8.2 Separabilidade . . . 171
11.8.3 Compacidade fraca-* . . . 172
11.8.4 Aplicação a L^∞ . . . 172

12 Conjuntos de Cantor 174
12.1 Definição geral . . . 174
12.2 Exemplo clássico . . . 175
12.3 Construção geométrica . . . 175
12.4 Propriedades fundamentais . . . 175
12.5 Observações adicionais . . . 177
12.6 Exercícios . . . 178

III A Construção Clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue 179

13 Fundamentos da teoria da medida 181
13.1 Motivação . . . 181
13.2 σ-álgebras . . . 181
13.3 Conjuntos de Borel . . . 182
13.4 Medidas exteriores . . . 183
13.5 Mensurabilidade de Carathéodory . . . 184
13.6 Medidas positivas . . . 186

13.7 Álgebras de conjuntos e pré-medidas . . . 189
13.7.1 Pré-medidas . . . 189
13.7.2 Construção da medida exterior . . . 190
13.7.3 Teorema de extensão de Carathéodory . . . 191
13.8 Espaços de medida e funções mensuráveis . . . 192
13.8.1 Conjuntos nulos e propriedades quase em toda a parte . . . 194
13.8.2 Funções mensuráveis . . . 195
13.8.3 Medidas de probabilidade . . . 195
13.9 Medidas com sinal e medidas vetoriais . . . 196
13.10Variação total . . . 197
13.11Decomposição de Jordan . . . 198
13.12Exemplos fundamentais de medidas . . . 199
13.13Completamento de uma medida . . . 202

14 Medidas de Borel e construção das medidas de Radon 205
14.1 Medidas de Borel positivas . . . 205
14.2 Construção da medida de Radon *à la* Carathéodory . . . 207
14.3 Regularidade das medidas de Borel . . . 210
14.3.1 Regularidade em espaços métricos . . . 211
14.3.2 Interior regularidade por compactos . . . 212
14.3.3 Regularidade das medidas de probabilidade . . . 214
14.3.4 Exterior-regularidade implica regularidade nos conjuntos mensuráveis 215

15 Medidas de Radon e Dualidade 218
15.1 Resultados topológicos preliminares . . . 218
15.2 Medidas de Radon (definição preliminar) . . . 218
15.3 Funcionais lineares e contínuos em $\mathcal{C}_0(X)$ são medidas de Borel . . . 219
15.4 Funcionais lineares e contínuos em $\mathcal{C}_0(X)$ são medidas de Radon finitas . . . 221
15.5 Medidas de Radon: definição definitiva . . . 222

16 Medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ 224
16.1 Volume de retângulos . . . 224
16.1.1 Propriedades do volume . . . 225
16.2 Medida exterior de Lebesgue . . . 225
16.3 Propriedades da medida exterior . . . 226
16.3.1 Compatibilidade com o volume . . . 226

16.4 Lebesgue-mensurabilidade . . . 227
16.4.1 Mensurabilidade de retângulos . . . 228
16.4.2 Mensurabilidade de abertos . . . 229
16.4.3 Conjuntos borelianos . . . 229
16.4.4 Conjuntos de medida nula . . . 230
16.5 Regularidade Borel e estrutura da σ-álgebra de Lebesgue . . . 230
16.6 Invariância da medida de Lebesgue . . . 235

17 Integral de Lebesgue – Introdução 239
17.1 Aproximação por funções simples . . . 239
17.2 Interpretação da integral de Lebesgue . . . 240
17.3 Integração de funções simples . . . 241
17.4 Integral de funções mensuráveis positivas . . . 243
17.5 Integração em subconjuntos mensuráveis . . . 243
17.6 Teoremas fundamentais da convergência . . . 244
17.7 Funções mensuráveis integráveis . . . 246

IV Representação e Estrutura das Medidas 249

18 Funções mensuráveis, convergência em medida e teorema de Lusin 251
18.1 Funções mensuráveis e funções borelianas . . . 251
18.2 Convergência em medida . . . 253
18.3 Hierarquia de mensurabilidade . . . 255
18.4 Composição de funções mensuráveis . . . 256
18.5 Teorema de Lusin . . . 257

19 Teoremas de representação de Riesz 261
19.1 Teorema de Riesz–Markov . . . 261
19.2 Convergência e dualidade em $\mathcal{C}_c(X)$ . . . 266
19.3 Integral de Lebesgue pelo teorema de Riesz–Markov . . . 269
19.4 Medidas de Radon . . . 270
19.5 Resumo do teorema de representação . . . 271

20 Topologia fraca-* das medidas de Radon 273
20.1 Compacidade fraca-* em $\mathcal{M}_b(X)$ . . . 274
20.2 Versão vaga de de la Vallée Poussin . . . 276

21 Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým 279

21.1 Definições preliminares 279

21.2 Decomposição de Hahn 280

21.3 Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým 282

22 Aplicações e teoremas afins 286

22.1 Exemplos de medidas e espaços nas aplicações 286

22.2 Teorema de Egorov 287

22.3 Integrabilidade uniforme e teorema de Vitali 288

22.3.1 Propriedades das funções integráveis 288

22.3.2 Teorema de Vitali 289

22.4 Desigualdades de Markov e de Chebyshev 291

22.4.1 Aplicações em Estatística e Probabilidade 291

22.5 Teorema de Fubini 293

22.5.1 Uma aplicação do teorema de Radon–Nikodým 294

23 Teorema de Hausdorff–Lebesgue 297

23.1 Hierarquia de Borel 297

23.2 A classe das funções borelianas é fechada pela convergência pontual 300

23.3 Teorema de Hausdorff–Lebesgue 301

24 Guia de exercícios 306

24.1 Parte I — Fundamentos da Análise Matemática 306

24.2 Parte II – A Construção Funcional da Integral de Lebesgue 314

24.3 Parte III–A Construção Clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue 321

24.4 Parte IV–Representação e Estrutura das Medidas 324

Prefácio

Estas notas nasceram simultaneamente da minha atividade de investigação e de vários anos de ensino da Teoria da Medida e da Integração ao nível da Licenciatura. O seu objetivo é apresentar uma exposição rigorosa, acessível e coerente dos fundamentos da teoria, sem perder de vista a intuição que lhes deu origem nem as profundas ligações que estabelecem com outros domínios da Matemática.

Uma teoria matemática pode ser abordada por diferentes caminhos. Tal como uma montanha pode ser escalada por vertentes distintas, também uma teoria pode ser construída a partir de diferentes ideias fundamentais. Embora todas essas abordagens conduzam ao mesmo cume, cada uma delas oferece uma perspetiva própria, e é precisamente da complementaridade desses pontos de vista que nasce uma compreensão mais profunda da teoria.

A Teoria da Medida constitui um exemplo particularmente notável desta riqueza. A construção histórica de Lebesgue, a abordagem axiomática de Carathéodory e a integral abstrata de Daniell conduzem, por caminhos distintos, à mesma teoria. Longe de serem concorrentes, estas construções iluminam aspetos diferentes de uma estrutura matemática comum. Uma das ideias centrais destas notas consiste precisamente em mostrar essa unidade.

Pessoalmente, sempre me senti mais próximo de uma abordagem que privilegia a compreensão profunda das ideias em vez da procura sistemática da máxima generalidade. A abstração desempenha um papel essencial na Matemática, mas adquire o seu verdadeiro significado quando surge naturalmente da necessidade de compreender um problema. Uma teoria verdadeiramente profunda não é necessariamente a mais abstrata, mas aquela que revela as ligações entre conceitos aparentemente distintos e faz emergir a abstração como uma consequência natural.

Neste texto adotaremos o enquadramento habitual da Análise Matemática, baseado no axioma da escolha dependente (DC), suficiente para desenvolver toda a teoria apresentada. Neste contexto, as aplicações que surgem naturalmente possuem sempre alguma propriedade de regularidade — como a mensurabilidade, a continuidade ou a propriedade de Baire — e, em particular, toda aplicação aditiva mensurável é automaticamente linear e contínua. Em particular, as soluções patológicas da equação funcional de Cauchy, cuja construção recorre a formas mais fortes do axioma da escolha, não desempenham qualquer papel na presente exposição e serão, por isso, ignoradas. Pela mesma razão, evitaremos construções que dependam de formas mais fortes do axioma da escolha, como as de conjuntos não mensuráveis, privilegiando uma teoria inteiramente assente em objetos matemáticos com propriedades efetivas de regularidade.

Estas notas refletem igualmente a influência de diferentes escolas matemáticas que tive

o privilégio de conhecer ao longo da minha formação e da minha carreira. A minha formação na Université catholique de Louvain, onde fui aluno de Jean Mawhin e Michel Willem, marcou profundamente a minha visão da Análise Funcional. Posteriormente, tive a oportunidade de trabalhar com David Preiss no University College London, aprofundando a minha formação em Análise Real. Beneficiei igualmente do ensino de Giuseppe Buttazzo na Università di Pisa e de Luigi Ambrosio na Scuola Normale Superiore di Pisa, onde descobri novas perspetivas sobre o Cálculo das Variações e a Teoria Geométrica da Medida. Mais tarde, a minha estadia na Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA), em Trieste, sob a orientação de Gianni Dal Maso, contribuiu decisivamente para consolidar o meu interesse pela Mecânica do Contínuo e pelos métodos variacionais.

Espero que estas notas possam ajudar o leitor não apenas a aprender a Teoria da Medida e da Integração, mas também a descobrir a unidade profunda da Análise e a apreciar a riqueza das diferentes perspetivas que conduzem às mesmas ideias fundamentais.

Lisboa, agosto de 2026

Nicolas Van Goethem

Introdução

0.1 Uma teoria, várias construções

A Teoria da Medida e da Integração constitui um dos pilares da Análise Matemática moderna. Desenvolvida no início do século XX para ultrapassar as limitações da integral de Riemann, tornou-se rapidamente uma linguagem comum a numerosos domínios da Matemática, desde a Análise Funcional e as Equações às Derivadas Parciais até à Probabilidade, à Teoria Geométrica da Medida e ao Cálculo das Variações.

A Matemática oferece frequentemente vários caminhos para compreender um mesmo objeto. Tal como um alpinista pode escolher diferentes vertentes para atingir o mesmo cume, também uma teoria pode ser construída a partir de pontos de vista distintos. Cada percurso possui as suas próprias dificuldades, revela paisagens diferentes e proporciona uma compreensão particular do terreno, mas todos conduzem ao mesmo objetivo.

Foi esta filosofia que orientou a organização deste livro. Na segunda parte, apresentámos a construção de Daniell, que parte da integral como um funcional linear positivo e evidencia, desde cedo, a estreita ligação entre integração, Análise Funcional e teoria dos operadores. Na terceira parte, desenvolvemos a construção clássica de Lebesgue, baseada na teoria da medida e na aproximação por funções simples. Esta abordagem permite integrar funções mensuráveis não negativas, admitindo eventualmente o valor $+\infty$, e conduz aos principais teoremas de convergência.

Embora partam de perspetivas diferentes, ambas as construções conduzem à mesma noção de integral para funções integráveis. Esperamos que o leitor, ao percorrer estes dois caminhos, adquira não apenas um conhecimento técnico mais sólido, mas também uma compreensão mais profunda da unidade da teoria.

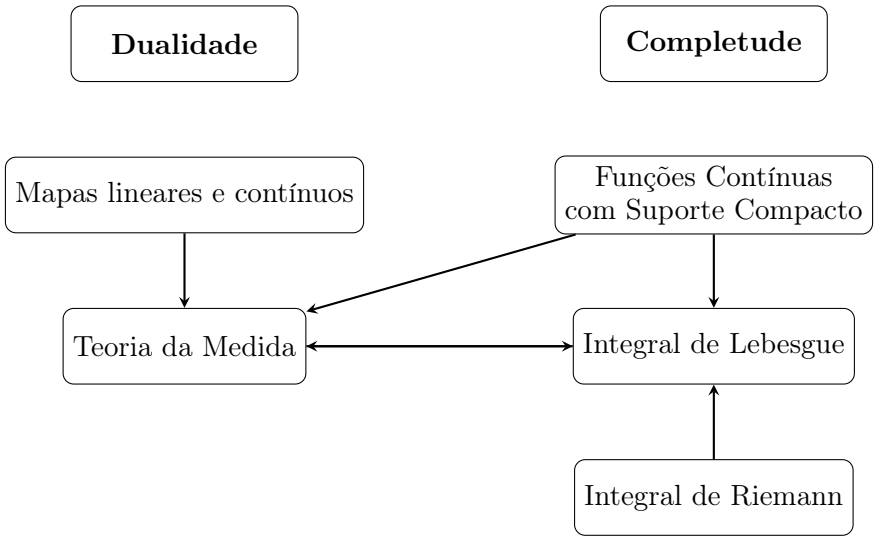
O objetivo destas notas não é privilegiar uma dessas abordagens em detrimento das restantes, mas mostrar como elas se articulam e como contribuem para uma compreensão mais profunda da teoria.

0.2 O fio condutor destas notas

Ao longo destas notas procuraremos evidenciar a unidade da teoria para além da diversidade das suas construções. O espaço das funções contínuas com suporte compacto,

$$\mathcal{C}_c(X),$$

desempenha, ao longo destas notas, o papel de fio condutor da exposição. Embora os capítulos apresentem diferentes construções da teoria da medida e da integração, regressaremos repetidamente a este espaço, onde convergem naturalmente a teoria da medida, a integração, a dualidade e, mais geralmente, a análise funcional.



Este ponto de vista permite compreender que muitos resultados aparentemente independentes constituem, na realidade, diferentes manifestações de uma mesma estrutura matemática.

0.3 Princípios orientadores

Dois princípios acompanharão constantemente o leitor.

O primeiro é a **completude**. A passagem ao limite constitui um tema recorrente em toda a teoria da integração. A construção das integrais de Daniell e de Lebesgue, os teoremas de convergência, os espaços L^p e muitos resultados fundamentais da Análise assentam, de uma forma ou de outra, na existência de espaços completos. A completude fornece o quadro natural onde as aproximações convergem e onde os processos infinitos adquirem um significado rigoroso.

O segundo é a **dualidade**. A possibilidade de representar medidas por funcionais lineares e contínuos constitui uma das ideias mais profundas da Análise. Esta perspetiva culmina no Teorema de Representação de Riesz e mostra que a teoria da medida e a análise funcional não são disciplinas independentes, mas diferentes expressões de uma mesma realidade matemática.

Ao longo destas notas procuraremos regressar frequentemente a estes dois princípios, mostrando como organizam naturalmente toda a teoria.

0.4 Organização das notas

Estas notas encontram-se organizadas em quatro partes, correspondendo a quatro etapas naturais no desenvolvimento da Teoria da Medida e da Integração.

A **Parte I**, *Fundamentos da Análise Matemática*, reúne os principais resultados de Topologia, Análise Funcional elementar e Integração de Riemann que servirão de base a toda a exposição. O axioma da escolha dependente, adotado como enquadramento lógico destas notas, é igualmente introduzido nesta parte.

A **Parte II**, *A Construção Funcional da Integral de Lebesgue*, desenvolve a abordagem de Daniell. Partindo da integral como um funcional linear positivo, introduzem-se os espaços L^1 e L^p, os principais resultados de Análise Funcional, a dualidade e as convergências fraca e fraca-*, evidenciando desde cedo a profunda ligação entre integração e Análise Funcional.

A **Parte III**, *A Construção Clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue*, segue a abordagem introduzida por Lebesgue e Carathéodory. São estudadas as medidas exteriores, a mensurabilidade, as medidas de Borel e de Radon, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a integração de funções mensuráveis, culminando nos principais teoremas de convergência.

Finalmente, a **Parte IV**, *Estrutura e Representação das Medidas*, reúne alguns dos desenvolvimentos mais avançados da teoria. Após o estudo da convergência em medida e do Teorema de Lusin, introduzem-se as medidas com sinal, a decomposição de Hahn e o Teorema de Radon–Nikodym. São igualmente apresentados os teoremas de representação de Riesz, que estabelecem a profunda ligação entre medidas de Radon e funcionais lineares contínuos, bem como uma introdução às medidas vetoriais. Esta última parte evidencia a unidade da teoria da medida, mostrando como conceitos provenientes da integração, da topologia e da Análise Funcional se articulam num quadro matemático comum, que desempenha um papel fundamental na Análise moderna.

Ao longo de todo o texto privilegiámos, sempre que possível, demonstrações construtivas. Em vez de recorrer apenas a argumentos abstratos de existência, procurámos construir explicitamente os objetos matemáticos introduzidos e evidenciar os mecanismos que conduzem aos principais resultados. Esta abordagem permite compreender melhor a origem das hipóteses, o papel desempenhado pelas aproximações e pelos processos de passagem ao limite, e prepara naturalmente o leitor para estudos mais avançados em Análise Matemática.

Sempre que possível, os resultados serão acompanhados por notas históricas e bibliográficas destinadas a situar o leitor no contexto do desenvolvimento da disciplina e a sugerir referências para estudo complementar.

Estas notas não pretendem apresentar apenas uma sucessão de definições e de teoremas. Procuram mostrar que diferentes construções, diferentes demonstrações e diferentes pontos de vista convergem para uma mesma teoria, cuja unidade constitui uma das mais belas realizações da Análise Matemática.

Nota bibliográfica

Entre as referências clássicas de Teoria da Medida, destacam-se *Measure Theory*, de P. R. Halmos [36], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B.

Folland [31], *Real and Complex Analysis*, de W. Rudin [68], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], e *Functional Analysis: Fundamentals and Applications*, de M. Willem [76]. Para um tratamento mais aprofundado da teoria das medidas de Radon, recomenda-se *Measure Theory*, de V. I. Bogachev [8]. Para aplicações à Análise Geométrica e ao Cálculo das Variações, pode consultar-se *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, de L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara [2]. Finalmente, para a teoria dos espaços L^p, recomendam-se *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de H. Brezis [12], *Analysis*, de E. H. Lieb e M. Loss [50], e *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*, de I. Fonseca e G. Leoni [32]. Como referência geral de Análise ao nível da licenciatura, pode ainda consultar-se *Analyse: Fondements, techniques, évolution*, de J. Mawhin [55].

Parte I

Fundamentos da Análise Matemática

A Teoria da Medida e da Integração apoia-se num conjunto de resultados fundamentais provenientes da Topologia, da Análise Funcional e da teoria clássica da integração. Antes de desenvolver as diferentes construções da integral de Lebesgue, é conveniente estabelecer este enquadramento comum.

Nesta primeira parte introduzimos o axioma da escolha dependente, que constitui o único princípio de escolha utilizado ao longo destas notas e é suficiente para a grande maioria dos resultados da Análise. Em seguida, recordamos as noções essenciais de Topologia e de espaços duais, que fornecem a linguagem natural para o estudo da continuidade, da compacidade e da dualidade. Finalmente, apresentamos a teoria da integral de Riemann, que servirá de ponto de partida para a construção de Daniell desenvolvida na parte seguinte.

Embora alguns destes temas possam parecer afastados da Teoria da Medida, todos desempenham um papel essencial nas construções posteriores. Em particular, a Topologia estará na base das medidas de Radon, a dualidade conduzirá naturalmente ao Teorema de Representação de Riesz e a integral de Riemann fornecerá a motivação e o ponto de partida para uma das construções da integral de Lebesgue.

O objetivo desta primeira parte não é desenvolver uma teoria autónoma, mas reunir os instrumentos fundamentais que permitirão compreender, de forma coerente e unificada, as diferentes abordagens da integração moderna.

Capítulo 1

Axioma da escolha dependente

> Aquilo que pode ser demonstrado não deve, em ciência, ser aceite sem demonstração.
>
> — Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Neste capítulo introduzimos o axioma da escolha dependente (DC), a única forma do axioma da escolha que utilizaremos ao longo destas notas. Embora seja estritamente mais fraco do que o axioma da escolha, ele é suficiente para demonstrar a grande maioria dos resultados fundamentais da Análise, nomeadamente o Teorema da Categoria de Baire.

1.1 O axioma da escolha dependente

O **axioma da escolha dependente (DC)** é uma versão mais fraca do **axioma da escolha (AC)**. Enquanto o axioma da escolha permite efetuar escolhas arbitrárias numa família qualquer de conjuntos não vazios, o DC garante apenas a construção de uma sucessão de escolhas, em que cada escolha depende da anterior.

Definição 1.1 (axioma da escolha dependente)**.** Seja S um conjunto não vazio e seja $R \subset S \times S$ uma relação tal que

$$\forall a \in S, \quad \exists\, b \in S \quad \text{com} \quad (a, b) \in R.$$

Então, para qualquer ponto inicial $a_0 \in S$, existe uma sucessão

$$(a_n)_{n \geq 0} \subset S$$

tal que

$$(a_n, a_{n+1}) \in R, \qquad \forall n \geq 0.$$

Nota 1.2. Enquanto o axioma da escolha permite efetuar escolhas arbitrárias numa família qualquer de conjuntos, o axioma da escolha dependente restringe essa possibilidade à construção de uma sucessão numerável de escolhas sucessivas.

Proposição 1.3. *No sistema axiomático* **ZF** *verificam-se as implicações*

$$\boxed{\mathrm{AC} \Longrightarrow \mathrm{DC} \Longrightarrow \mathrm{CC}}$$

onde

- AC *representa o axioma da escolha;*
- DC *representa o axioma da escolha dependente;*
- CC *representa o axioma da escolha Numerável.*

Nenhuma das implicações inversas é demonstrável em **ZF**.

1.2 A analogia dos pares de meias

O conhecido exemplo dos pares de meias é frequentemente utilizado para ilustrar o axioma da escolha. Imaginemos uma família numerável de pares de meias indistinguíveis,

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

e pretendamos escolher exatamente uma meia de cada par. Ao contrário do caso dos sapatos, não existe qualquer critério natural que permita distinguir uma meia da outra. É precisamente para garantir a existência de uma tal função de escolha que surge o axioma da escolha.

Nota 1.4. O exemplo dos pares de meias fornece uma boa intuição sobre a necessidade de um axioma de escolha, mas não constitui propriamente uma aplicação do axioma da escolha dependente. O DC diz respeito a uma situação diferente: a construção sucessiva de uma cadeia infinita de escolhas, em que cada nova escolha depende da anterior.

1.3 O labirinto infinito

Uma boa forma de compreender o axioma da escolha dependente consiste em imaginar um labirinto infinito. Cada sala representa um elemento de um conjunto S. Entre duas salas existe uma porta sempre que a relação

$$xRy$$

é satisfeita. Não dispomos do mapa completo do labirinto, mas sabemos que nunca chegamos a um beco sem saída: de qualquer sala existe sempre pelo menos uma porta que permite prosseguir o percurso. O axioma da escolha dependente afirma então que, escolhida uma sala inicial x_0, é possível construir um caminho infinito

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow \cdots$$

em que cada nova sala é escolhida apenas depois de se conhecer a anterior.

Nota 1.5. O DC não fornece um mapa do labirinto nem indica qual a porta a escolher em cada etapa. Garante apenas que é possível continuar indefinidamente o percurso, efetuando sucessivamente uma escolha em cada passo. Esta imagem traduz fielmente o significado do axioma.

1.4 O teorema da categoria de Baire

Uma das aplicações fundamentais do axioma da escolha dependente surge na demonstração do Teorema da Categoria de Baire.

Teorema 1.6 (Categoria de Baire)**.** *Seja X um espaço métrico completo e não vazio. Então, a interseção de toda a sucessão numerável de subconjuntos abertos densos de X é densa.*
Equivalentemente, X não pode ser escrito como uma união numerável de conjuntos fechados sem interior.

Na demonstração deste resultado constrói-se sucessivamente uma cadeia de bolas fechadas

$$\overline{B}(x_0, r_0) \supset \overline{B}(x_1, r_1) \supset \overline{B}(x_2, r_2) \supset \cdots$$

escolhidas de forma que

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap G_n.$$

Cada nova escolha depende da anterior, exatamente como no labirinto descrito na secção precedente. O axioma da escolha dependente garante que esta construção pode prosseguir indefinidamente.

Nota 1.7. Em 1977, C. E. Blair demonstrou que, em ZF, o Teorema da Categoria de Baire para espaços métricos completos implica o axioma da escolha dependente [7]. Como a implicação recíproca é clássica, os dois princípios são equivalentes em ZF. Assim, no contexto de ZF,

$$\boxed{\text{Teorema da Categoria de Baire} \iff \text{DC.}}$$

Esta equivalência explica por que razão o DC é frequentemente considerado o axioma de escolha natural da Análise clássica.

Nota bibliográfica

Para uma introdução às diferentes formas do axioma da escolha e às suas consequências em Análise, podem consultar-se *The Axiom of Choice*, de T. J. Jech [41], e *Consequences of the Axiom of Choice*, de P. Howard e J. E. Rubin [40].

Nota 1.8. Ao longo destas notas, evitaremos geralmente o recurso a formas fortes do axioma da escolha, trabalhando, sempre que possível, em espaços separáveis. Nesses espaços, muitas das escolhas necessárias podem ser efetuadas a partir de famílias enumeráveis densas.

Capítulo 2

Noções Fundamentais de Topologia

A Topologia fornece a linguagem comum da Análise moderna.
(Frase atribuída a Bourbaki)

A Topologia fornece o enquadramento abstrato no qual se desenvolve grande parte da Análise moderna. Embora muitas das suas noções tenham origem na Geometria, é sobretudo na Análise que elas revelam toda a sua importância. Conceitos como continuidade, convergência, compacidade, separação ou conectividade dependem apenas da estrutura topológica do espaço e não da existência de uma distância.

Ao longo destas notas estudaremos medidas, integração de Lebesgue, espaços funcionais e diversos resultados fundamentais de Análise Funcional. Todos esses desenvolvimentos assentam, direta ou indiretamente, sobre as noções introduzidas neste capítulo. O objetivo é apresentar os conceitos essenciais de forma progressiva, privilegiando a intuição sem abdicar do rigor matemático.

2.1 Espaços topológicos

Recordemos que, dado um conjunto X, o seu conjunto das partes, denotado por $\mathcal{P}(X)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Definição 2.1. Uma **topologia** sobre X é uma família $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ tal que

$$\emptyset, X \in \tau,$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau, \qquad (U_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau,$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{N} U_i \in \tau, \qquad U_i \in \tau.$$

Os elementos de τ chamam-se **abertos** de X. O par (X, τ) denomina-se **espaço topológico**.

Nota 2.2. Frequentemente identifica-se o espaço topológico com o conjunto subjacente e escreve-se simplesmente X, ficando a topologia subentendida.

Nota 2.3. A Topologia especifica apenas quais são os subconjuntos considerados abertos. Todas as restantes noções fundamentais — vizinhanças, continuidade, fecho, interior, compacidade e conectividade — derivam desta escolha.

Exemplo 2.4. Os exemplos mais simples de topologias são:

- a topologia discreta, em que todos os subconjuntos são abertos;
- a topologia indiscreta, constituída apenas por $\emptyset$ e X;
- a topologia euclidiana de $\mathbb{R}^n$, gerada pelas bolas abertas.

Nota histórica

Felix Hausdorff (1868–1942) publicou em 1914 o tratado *Grundzüge der Mengenlehre*, considerado um dos textos fundadores da Topologia moderna.

2.2 Aplicações contínuas

A continuidade constitui uma das noções centrais da Análise. A definição seguinte mostra que ela depende apenas da estrutura topológica dos espaços envolvidos.

Definição 2.5. Sejam D e R espaços topológicos. Uma aplicação

$$F : D \longrightarrow R$$

diz-se **contínua** se, para todo aberto $A \subset R$,

$$F^{-1}(A) = \{x \in D : F(x) \in A\}$$

é um aberto de D.

Nota 2.6. Esta definição não utiliza qualquer noção de distância. É precisamente esta independência que permite desenvolver a Análise em espaços topológicos muito mais gerais do que os espaços métricos.

Terminologia. Consoante o contexto, utilizam-se diferentes designações.

Contexto	Designação
D espaço vetorial e R corpo associado	função
D espaço de funções	funcional
Aplicação linear	forma linear
Entre espaços normados	operador linear

Exercício 1 (M)

Demonstrar que uma função real monótona definida num intervalo é descontínua num conjunto, no máximo, numerável.

2.3 Recobrimentos e compacidade

A noção de compacidade desempenha um papel central em Topologia e em Análise. Ela permite generalizar muitas propriedades fundamentais dos intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e dos conjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$. A sua definição baseia-se no conceito de recobrimento aberto.

Definição 2.7. Seja X um espaço topológico. Uma família de subconjuntos

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

diz-se um **recobrimento** de X se

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Se todos os conjuntos U_α forem abertos, diz-se que $\mathcal{U}$ é um **recobrimento aberto**.

Em muitas situações, um espaço pode ser recoberto por uma família muito grande de abertos. A compacidade exprime precisamente o facto de ser sempre possível extrair um número finito desses abertos sem deixar de recobrir o espaço.

Definição 2.8. Um subconjunto $K \subset X$ diz-se **compacto** se todo recobrimento aberto de K admite um sub-recobrimento finito.

Exemplo 2.9. No espaço euclidiano, o intervalo fechado $[0, 1]$ é compacto.
Em contrapartida, o intervalo aberto $(0, 1)$ não é compacto, pois o recobrimento $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \geq 2}$ não admite qualquer sub-recobrimento finito.

A compacidade é preservada pelas aplicações contínuas.

Teorema 2.10. *Se K é um espaço compacto e $f : K \to Y$ é contínua, então $f(K)$ é compacto.*

Este resultado mostra que a compacidade constitui uma propriedade puramente topológica: ela depende apenas da estrutura dos abertos e não da existência de uma distância ou de uma norma.

Para preparar o estudo da paracompacidade, introduzimos uma propriedade importante dos recobrimentos.

Definição 2.11. Um recobrimento

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

diz-se **localmente finito** se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V_x de x que intersecta apenas um número finito dos conjuntos U_α.

Nota 2.12. A condição de finitude local é bastante mais forte do que exigir apenas que cada ponto pertença a um número finito de conjuntos do recobrimento. Ela garante que existe toda uma vizinhança do ponto onde apenas um número finito de elementos do recobrimento intervém.

Exercício 2 (M)

1. Mostrar que todo subconjunto compacto de um espaço topológico é compacto relativamente à topologia induzida.
2. Demonstrar que a imagem contínua de um compacto é compacta.
3. Dar um exemplo de um recobrimento infinito que admite um sub-recobrimento finito e de outro que não o admite.

2.4 Espaços vetoriais

Grande parte dos espaços estudados em Análise possui simultaneamente uma estrutura algébrica e uma estrutura topológica. Antes de introduzir os espaços vetoriais topológicos, recordemos a noção de espaço vetorial.

Definição 2.13. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ é um conjunto V munido de uma adição

$$V \times V \longrightarrow V, \qquad (x, y) \mapsto x + y,$$

e de uma multiplicação por escalares

$$\mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

que satisfazem os axiomas usuais:

- associatividade e comutatividade da adição;
- existência do vetor nulo e de vetores opostos;
- compatibilidade da multiplicação escalar;
- propriedades distributivas relativamente à adição em V e em $\mathbb{K}$;
- $1x = x$, para todo $x \in V$.

Exemplo 2.14. Os exemplos fundamentais são

$$\mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{C}^n, \qquad C(\Omega), \qquad C_c(\Omega), \qquad L^p(\Omega), \qquad \ell^p.$$

Todos desempenham um papel central na Análise moderna.

2.5 Espaços vetoriais topológicos

Na maioria das aplicações, pretende-se que as operações algébricas sejam compatíveis com a noção de proximidade. Esta compatibilidade conduz naturalmente ao conceito de espaço vetorial topológico.

Definição 2.15. Um **espaço vetorial topológico** é um espaço vetorial V munido de uma topologia para a qual as aplicações

$$(x, y) \longmapsto x + y,$$

e

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

são contínuas.

Nota 2.16. Num espaço vetorial topológico, a estrutura algébrica e a estrutura topológica coexistem de forma compatível. Em particular, pequenas perturbações dos vetores originam pequenas perturbações das suas somas e dos seus múltiplos escalares.

Nota 2.17. Grande parte dos espaços utilizados em Análise são espaços vetoriais topológicos. Entre eles encontram-se os espaços normados, os espaços de Banach, os espaços de Hilbert, os espaços de Fréchet e os espaços L^p.

2.6 Sucessões de Cauchy

A noção de sucessão de Cauchy permite caracterizar a completude de um espaço sem recorrer ao conhecimento prévio do limite da sucessão.

Definição 2.18. Seja V um espaço vetorial topológico.
Uma sucessão $(x_n) \subset V$ diz-se **de Cauchy** se, para toda a vizinhança U da origem, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n - x_m \in U, \qquad n, m \geq N.$$

Nota 2.19. Quando V é um espaço normado, esta definição equivale à condição

$$\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0,$$

quando $n, m \to \infty$.

Definição 2.20. Um espaço vetorial topológico diz-se **completo** se toda sucessão de Cauchy converge para um elemento do espaço.

Definição 2.21. Um subconjunto $A \subset V$ diz-se **precompacto** se toda sucessão em A admite uma sub-sucessão de Cauchy.

Nota 2.22. Em espaços métricos completos, a noção de precompacidade coincide com a de compacidade relativa. Este resultado será retomado mais adiante no contexto dos espaços métricos.

Nota 2.23. Nos espaços métricos, um conjunto é compacto se e somente se é completo e totalmente limitado (ou precompacto). Em espaços vetoriais topológicos gerais, esta equivalência deixa de ser verdadeira.

2.7 Outras noções topológicas

Terminamos esta introdução reunindo algumas propriedades topológicas fundamentais que serão utilizadas frequentemente ao longo destas notas.

Definição 2.24. Um espaço topológico X diz-se **localmente compacto** se todo ponto de X admite uma vizinhança cuja aderência é compacta.

Nota 2.25. Em espaços de Hausdorff esta definição é equivalente a exigir que todo ponto possua uma vizinhança relativamente compacta.

Definição 2.26. Um espaço topológico é **separável** se contém um subconjunto denso numerável.

Exemplo 2.27. Os espaços

$$\mathbb{R}^n, \qquad C([0,1]), \qquad L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,$$

são separáveis. Em contrapartida, $L^\infty(\Omega)$ não é, em geral, separável.

Nota 2.28. Num espaço métrico separável existe uma base numerável de abertos. Mais precisamente, se $D \subset X$ é denso e numerável, então a família

$$\{B(q,r) : q \in D,\ r \in \mathbb{Q}^+\}$$

constitui uma base da topologia.

Definição 2.29. Um espaço topológico é **σ-compacto** se pode ser escrito como união numerável de subconjuntos compactos.

Definição 2.30. Um espaço topológico é **sequencialmente compacto** se toda sucessão admite uma sub-sucessão convergente.

Teorema 2.31 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é sequencialmente compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

2.8 Espaços de Hausdorff

A separação de pontos constitui uma das propriedades mais importantes da Topologia. Entre os diversos axiomas de separação, a condição de Hausdorff é a mais frequentemente utilizada em Análise.

Definição 2.32. Um espaço topológico X diz-se **Hausdorff** se, para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos U e V tais que

$$x \in U, \qquad y \in V, \qquad U \cap V = \varnothing.$$

Nota 2.33. A propriedade de Hausdorff garante, essencialmente, a unicidade dos limites. Por esta razão, é uma hipótese natural em praticamente toda a Análise moderna.

Exercício 3 (M)

Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Demonstrar que todo conjunto compacto $K \subset X$ é fechado. **Sugestão:** mostrar que $X \setminus K$ é aberto, usando a separação de pontos por abertos disjuntos.

Nota 2.34. Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja $K \subset X$ compacto. Demonstrar que Então existe um aberto U tal que

$$K \subset U \quad \text{e} \quad \overline{U} \text{ é compacto.}$$

Em outras palavras, prove que todo subconjunto compacto de um espaço localmente compacto Hausdorff admite uma vizinhança aberta relativamente compacta.

Teorema 2.35. *Num espaço de Hausdorff verificam-se as seguintes propriedades.*

1. *Toda sucessão convergente possui limite único.*
2. *Todo subconjunto compacto é fechado.*
3. *O gráfico de uma aplicação contínua é fechado.*

Nota histórica

O axioma de separação formulado por Felix Hausdorff em 1914, na sua obra *Grundzüge der Mengenlehre* [38], tornou-se uma das hipóteses fundamentais da Topologia Geral e da Análise moderna.

2.9 Exaustão por compactos

Introduzimos o seguinte resultado de Topologia, que será utilizado repetidamente ao longo destas notas.

Proposição 2.36 (Exaustão por compactos)**.** *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ-compacto. Então existe uma sucessão de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

e

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Em particular, todo compacto $K \subset X$ está contido em algum K_n.

Demonstração. Como X é σ-compacto, existe uma sucessão de compactos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Substituindo, se necessário, C_n por $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$, podemos supor que a sucessão (C_n) é crescente:

$$C_n \subset C_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Recordemos que, pela compacidade local de X, para cada $x \in X$ existe um aberto V_x tal que

$$x \in V_x \qquad \text{e} \qquad \overline{V_x} \text{ é compacto.}$$

O compacto C_1 é coberto pelos abertos V_x, com $x \in C_1$. Logo, pela compacidade de C_1, existem $x_1, \ldots, x_{m_1} \in C_1$ tais que

$$C_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} V_{x_j}.$$

Definamos

$$K_1 := \bigcup_{j=1}^{m_1} \overline{V_{x_j}}.$$

Então K_1 é compacto e $C_1 \subset K_1$. Suponhamos agora construído o compacto K_n. O conjunto $K_n \cup C_{n+1}$ é compacto. Para cada $x \in K_n \cup C_{n+1}$, escolhemos um aberto V_x cuja aderência é compacta. Por compacidade, existem $x_1, \ldots, x_{m_{n+1}} \in K_n \cup C_{n+1}$ tais que

$$K_n \cup C_{n+1} \subset \bigcup_{j=1}^{m_{n+1}} V_{x_j}.$$

Definamos

$$K_{n+1} := \bigcup_{j=1}^{m_{n+1}} \overline{V_{x_j}}.$$

Sendo uma união finita de compactos, K_{n+1} é compacto. Além disso,

$$K_n \cup C_{n+1} \subset \bigcup_{j=1}^{m_{n+1}} V_{x_j} \subset \operatorname{int}(K_{n+1}),$$

pois cada V_{x_j} é um aberto contido em K_{n+1}. Em particular, $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$ e $C_{n+1} \subset K_{n+1}$. Por indução, obtemos uma sucessão de compactos (K_n) tal que

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$$

e $C_n \subset K_n$ para todo n. Consequentemente,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset X,$$

e, portanto,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Finalmente, seja $K \subset X$ compacto. Como $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$, temos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(K_n).$$

Assim, $\big(\operatorname{int}(K_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta crescente de K. Pela compacidade de K, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \operatorname{int}(K_N) \subset K_N.$$

□

2.10 Paracompacidade e partições da unidade

A paracompacidade constitui uma das propriedades estruturais mais importantes da Topologia moderna. O seu principal interesse reside na possibilidade de construir partições da unidade, ferramenta essencial para passar de construções locais a construções globais.

Definição 2.37. Sejam σ e $\widetilde{\sigma}$ dois recobrimentos de X.
Diz-se que $\widetilde{\sigma}$ é um **refinamento** de σ se cada elemento de $\widetilde{\sigma}$ estiver contido num elemento de σ.

Definição 2.38. Um espaço topológico diz-se **paracompacto** se todo recobrimento aberto admite um refinamento localmente finito.

Exercício 4 (M)

1. Demonstrar que todo espaço compacto é paracompacto.
2. Dar um exemplo de espaço paracompacto que não seja compacto.
3. Demonstrar que todo espaço métrico é paracompacto.

Definição 2.39. Um espaço topológico é dito **normal** se quaisquer dois conjuntos fechados disjuntos podem ser separados por vizinhanças abertas disjuntas.

Exercício 5 (D)

Demonstrar que todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.

Nota 2.40. Todo espaço Hausdorff localmente compacto e σ-compacto é paracompacto.

Nota 2.41. Ao contrário das somas finitas, uma soma infinita de funções nem sempre está bem definida. Para que

$$\sum_{\alpha} f_\alpha(x)$$

tenha sentido para todo $x \in X$, basta que, em cada ponto, apenas um número finito das funções seja diferente de zero. Nesta situação, a soma reduz-se localmente a uma soma finita.
Esta propriedade é assegurada quando os suportes das funções formam uma família localmente finita. É precisamente por essa razão que a paracompacidade desempenha um papel fundamental na construção de partições da unidade.

Definição 2.42. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O **suporte** de f, denotado por $\mathrm{spt}(f)$, é o fecho do conjunto

$$\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}.$$

Isto é,

$$\mathrm{spt}(f) = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 2.43. Uma **partição da unidade** subordinada a um recobrimento aberto $\{V_\alpha\}$ é uma família de funções contínuas

$$f_\alpha : X \longrightarrow [0, 1]$$

tal que

$$\sum_{\alpha} f_\alpha(x) = 1, \quad \text{e} \quad \mathrm{spt}(f_\alpha) \subset V_\alpha.$$

Nota 2.44. As partições da unidade permitem transformar problemas globais em problemas locais. Cada função da partição localiza a análise numa vizinhança onde a geometria ou a estrutura do espaço é mais simples. Após resolver o problema localmente, a soma ponderada das soluções fornece uma construção global. Multiplicando uma função ou uma solução local pelos elementos de uma partição da unidade e somando os resultados, obtém-se uma construção global que preserva as propriedades locais. Este princípio de *local para global* desempenha um papel essencial em nu-

merosos domínios da Matemática. As partições da unidade intervêm, por exemplo, na construção de medidas de Radon, na definição de integrais sobre variedades, na aproximação por funções suaves, na resolução de equações diferenciais parciais e em muitos problemas do Cálculo das Variações e da Geometria Diferencial.

Teorema 2.45 (Existência de partições da unidade)**.** *Todo espaço paracompacto de Hausdorff admite partições da unidade subordinadas a qualquer recobrimento aberto.*

Lema 2.46 (Lema de Urysohn)**.** *Se X é um espaço normal e $F, G \subset X$ são fechados disjuntos, existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que*

$$f = 0 \quad \text{em } F, \qquad f = 1 \quad \text{em } G.$$

Nota histórica

Pavel Urysohn (1898–1924) introduziu vários dos conceitos fundamentais da Topologia Geral moderna. O lema que leva o seu nome, publicado postumamente, estabelece uma ligação profunda entre a separação de conjuntos fechados e a existência de funções contínuas [75]. Em 1944, Jean Dieudonné introduziu a noção de paracompacidade [23], que se tornou uma das hipóteses estruturais mais importantes da Topologia moderna. A combinação da paracompacidade com o Lema de Urysohn conduz à existência de partições da unidade subordinadas a coberturas abertas. Estas permitem reunir construções locais numa construção global e desempenham hoje um papel essencial na Geometria Diferencial, na Análise e na teoria das variedades.

Nota bibliográfica

O Lema de Urysohn, a paracompacidade e as partições da unidade são estudados em detalhe em *Topology*, de J. Dugundji [24], e, no contexto das variedades diferenciáveis, em *Introduction to Smooth Manifolds*, de J. M. Lee [48].

2.11 Espaços métricos

> Mathematics is the art of giving the same name to different things.
>
> — Henri Poincaré, *The Future of Mathematics*

Os espaços métricos desempenham um papel central em Análise. A introdução de uma distância permite medir quantitativamente a proximidade entre pontos e conduz a caracterizações particularmente simples da continuidade, da convergência e da compacidade.

Definição 2.47 (Espaço Métrico)**.** Um *espaço métrico* é um par (X, d), onde X é um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função chamada *métrica*, tal que, para todos $x, y, z \in X$:

1. $d(x,y) \geq 0$ (*não negatividade*),
2. $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$ (*identidade dos indiscerníveis*),
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (*simetria*),
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (*desigualdade triangular*).

Um espaço topológico (X,τ) é *metrizável* se existe uma métrica d em X cuja topologia induzida coincide com τ.

Exercício 6 (M)

Demonstrar que um espaço metrizável é (i) normal; (ii) Hausdorff; (iii) paracompacto.

Exercício 7 (F)

Demonstrar que um compacto de X é limitado se X for métrico.

Nota 2.48. A compacidade é uma propriedade topológica, enquanto a limitação depende da métrica considerada.

A definição topológica da continuidade admite, em espaços métricos, a seguinte caracterização equivalente.

Definição 2.49 (Continuidade em Espaços Métricos)**.** Sejam (X,d_X) e (Y,d_Y) espaços métricos. Uma função $u : X \to Y$ é dita

1. *contínua em* $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$d_X(x,y) \leq \delta \implies d_Y(u(x),u(y)) \leq \varepsilon;$$
2. *uniformemente contínua* se o δ puder ser escolhido independentemente de $x \in X$.

O *módulo de continuidade* de u é definido por
$$\omega_u(\delta) := \sup\{d_Y(u(x),u(y)) : d_X(x,y) \leq \delta\}.$$

Exercício 8 (M)

Mostre que a função distância $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Teorema 2.50 (Compacidade & compacidade sequencial)**.** *Num espaço métrico (assumindo o axioma da escolha dependente), compacidade é equivalente à compacidade sequencial.*

Nota 2.51. Os espaços normados constituem uma importante classe de espaços métricos, pois toda norma induz naturalmente uma métrica. Em contrapartida, um espaço métrico arbitrário não possui, em geral, qualquer estrutura vetorial.

Teorema 2.52 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico localmente compacto, σ-compacto e completo. Então X admite uma métrica $\tilde{d}$ com a propriedade de Heine–Borel (isto é, toda parte fechada e limitada é compacta) tal que $\tilde{d}$ coincide localmente com d.*

Nota 2.53. O teorema é válido, em particular, em $\mathbb{R}^n$. Recorde-se que, num espaço métrico de Hausdorff (ver Exercícios 3 e 8), todo compacto é fechado e limitado. O Teorema de Heine–Borel estabelece, sob hipóteses adicionais, a recíproca desta propriedade. Pode, assim, ser visto como uma extensão do Teorema de Bolzano–Weierstrass.

Nota 2.54. Num espaço métrico, a compacidade local implica completude local. Contudo, esta propriedade não é suficiente para garantir a propriedade de Heine–Borel; é essencial que o espaço seja completo, evitando que sucessões de Cauchy escapem das vizinhanças onde a métrica é completa.

Nota 2.55. Este resultado foi demonstrado por Robert Williamson e Ludvik Janos no artigo *Constructing Metrics with the Heine–Borel Property*, publicado nos *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 100, n.º 3 (1987). Os espaços métricos que satisfazem esta propriedade são frequentemente designados por *proper metric spaces*.

Nota 2.56. Nenhum espaço de Banach infinito-dimensional possui a propriedade de Heine–Borel na sua topologia normada; isto é, em tais espaços, conjuntos fechados e limitados não são compactos.
Por outro lado, alguns espaços de Fréchet infinito-dimensionais podem possuir esta propriedade, no sentido de admitirem uma métrica compatível com a topologia para a qual todo conjunto fechado e limitado é compacto. Um exemplo importante é o espaço $C^\infty(\Omega)$, que, embora infinito-dimensional, possui uma estrutura de Fréchet completa e metrizável.

Exercício 9 (D)

Seja (X, d) um espaço métrico separável. Prove que X satisfaz o segundo axioma da numerabilidade. Dizemos que um espaço topológico X é *de segunda contagem* se existe uma base numerável para a sua topologia; isto é, existe uma família numerável $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ de abertos tal que todo aberto de X pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.

Exercício 10 (M)

Seja (X, d) um espaço métrico separável e localmente compacto. Prove que X é σ-compacto. Dizemos que um espaço topológico X é *σ-compacto* se existe uma sucessão (K_n) de subconjuntos compactos de X tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Os resultados seguintes mostram que a existência de uma métrica impõe naturalmente alguns dos principais axiomas de separação da Topologia Geral. Em particular, todo espaço metrizável é um espaço de Hausdorff.

Lema 2.57. *Todo espaço topológico métrico (ou metrizável) é Hausdorff.*

Nota 2.58. O lema anterior mostra que a topologia induzida por uma métrica permite sempre separar dois pontos distintos por vizinhanças abertas disjuntas. Consequentemente, todo espaço metrizável é um espaço de Hausdorff.

Nota histórica

Maurice Fréchet (1878–1973) introduziu, na sua tese de doutoramento de 1906, o conceito de espaço métrico, reunindo num quadro abstrato diversas noções de distância já utilizadas em Análise [33]. O seu trabalho permitiu estudar de forma unificada a convergência, a continuidade e a compacidade, abrindo caminho ao desenvolvimento da Topologia Geral e da Análise Funcional.

Nota bibliográfica

Para espaços métricos e as suas aplicações em Análise, recomenda-se *Principles of Mathematical Analysis*, de W. Rudin [67]. Uma apresentação mais orientada para a Análise Funcional encontra-se em *A Course in Functional Analysis*, de J. B. Conway [19].

2.12 Supremo, ínfimo e semicontinuidade

As noções de supremo e ínfimo desempenham um papel fundamental na Análise Real. Elas permitem descrever propriedades de conjuntos de números reais e constituem a base para a definição dos limites superior e inferior de sucessões. Estes últimos fornecem uma descrição precisa do comportamento assintótico de sucessões que não são necessariamente convergentes. Os conceitos de limite superior e inferior conduzem naturalmente à noção de semicontinuidade, uma generalização da continuidade que desempenha um papel central em numerosos problemas de Análise, Equações Diferenciais e Cálculo das Variações. Em particular, a semicontinuidade inferior é uma hipótese essencial em muitos teoremas de existência de minimizadores.

2.12.1 Supremo e ínfimo

Definição 2.59 (Supremo e Ínfimo)**.** Seja $A \subset \mathbb{R}$. O *supremo* de A, denotado por $\sup A$, é o menor número real s tal que

$$x \leq s, \qquad \forall\, x \in A.$$

O *ínfimo* de A, denotado por $\inf A$, é o maior número real i tal que

$$i \leq x, \qquad \forall\, x \in A.$$

Exemplo 2.60. Seja $A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Então $\sup A = 1$, embora $1 \notin A$. Além disso, $\inf A = 0$, mas o ínfimo não é atingido.

Exemplo 2.61. Considere a sucessão $a_n = (-1)^n$. Temos

$$\inf_{k\geq 1}\{a_n : n \geq k\} = -1, \qquad \sup_{k\geq 1}\{a_n : n \geq k\} = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

a sucessão não converge.

Nota 2.62. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Define-se a soma de Minkowski de A e B por

$$A + B := \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}.$$

De modo análogo, se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são funções, define-se

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad x \in A.$$

Proposição 2.63 (Propriedades básicas)**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções limitadas.*

1. *Se $A \subset B$, então*
$$\sup A \leq \sup B, \qquad \inf A \geq \inf B.$$
2. $$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$
3. $$\sup_A(f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g,$$
e
$$\inf_A(f + g) \geq \inf_A f + \inf_A g.$$

4. *Se*
$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|, \qquad \forall\, x, y \in A,$$
então
$$\sup_A f - \inf_A f \leq \sup_A g - \inf_A g.$$

Exercício 11 (F)

Demonstre as propriedades anteriores.

Exercício 12 (F)

Demonstre que:

1. $$f + g = \max(f, g) + \min(f, g).$$
2. $$|f - g| = \max(f, g) - \min(f, g).$$
3. $$|f - g| = f + g - 2\min(f, g).$$

As propriedades anteriores estendem-se naturalmente a funções de duas variáveis.

Sejam X e Y conjuntos e seja
$$f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

$$\sup_{x\in X}\sup_{y\in Y} f(x, y) = \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y),$$

e

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y) \leq \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y).$$

Exercício 13 (F)

Demonstre a última desigualdade.

2.12.2 Limites superior e inferior de sucessões

Os limites inferior e superior constituem uma ferramenta fundamental para descrever o comportamento assintótico de sucessões que não são necessariamente convergentes.

Definição 2.64 (Limite inferior e limite superior)**.** Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Definem-se
$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{k\in\mathbb{N}}\inf_{n\geq k} x_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{k\in\mathbb{N}}\sup_{n\geq k} x_n.$$

Nota 2.65. 1. A sucessão $a_k := \inf_{n\geq k} x_n$ é crescente, enquanto $b_k := \sup_{n\geq k} x_n$ é decrescente.

2. Os limites inferior e superior existem sempre e satisfazem

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Proposição 2.66. *Sejam (x_n) e (y_n) sucessões de números reais. Então,*

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n),$$
$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

Exercício 14 (F)

Demonstre as desigualdades da proposição anterior.

Exercício 15 (F)

Para cada uma das sucessões seguintes, determine:

- $\limsup_{n\to\infty} a_n$;
- $\liminf_{n\to\infty} a_n$;
- $\lim_{n\to\infty} a_n$, caso exista.

1. $$a_n = n(-1)^n;$$
2. $$a_n = 2 + \frac{n+1}{n};$$
3. $$a_n = 2(-1)^n + \frac{n+1}{n};$$
4. $$a_n = n\big((-1)^n + 1\big) + (-1)^n.$$

2.12.3 Semicontinuidade

As noções de semicontinuidade generalizam o conceito de continuidade e desempenham um papel central em numerosas áreas da Análise. Em particular, a semicontinuidade inferior constitui uma hipótese fundamental em muitos teoremas de existência no Cálculo das Variações.

Definição 2.67 (Semicontinuidade)**.** Seja X um espaço métrico e seja

$$F : X \longrightarrow [-\infty, +\infty].$$

1. Diz-se que F é *semicontínua inferiormente (s.c.i.)* em $x \in X$ se, para toda

sucessão (x_n) convergindo para x,

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n).$$

2. Diz-se que F é *semicontínua superiormente (s.c.s.)* em $x \in X$ se, para toda sucessão (x_n) convergindo para x,

$$\limsup_{n\to\infty} F(x_n) \leq F(x).$$

Exemplo 2.68. Considere a função

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Para qualquer sucessão $x_n \to 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) = 1 \geq F(0),$$

pelo que F é semicontínua inferiormente em 0.
Contudo,

$$\limsup_{n\to\infty} F(x_n) = 1 > F(0),$$

pelo que F não é semicontínua superiormente em 0. Assim, F não é contínua em 0.

Exercício 16 (F)

Demonstre que, se

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad a_n \geq 0,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definição 2.69 (Invólucro superior)**.** Seja

$$\{F_j : X \to [-\infty, +\infty]\}_{j\in J}.$$

O *invólucro superior* desta família é a função definida por

$$\left(\sup_{j\in J} F_j\right)(x) := \sup\{F_j(x) : j \in J\}.$$

Proposição 2.70 (Caracterização por conjuntos de nível)**.** *Seja*

$$F : X \longrightarrow]-\infty, +\infty].$$

São equivalentes:

1. *F é semicontínua inferiormente;*

2. *Para todo $t \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in X : F(x) > t\}$$

é aberto.

Demonstração. Suponhamos primeiro que F não seja semicontínua inferiormente. Então, existe uma sucessão (x_n) convergindo para $x \in X$ e existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) < t < F(x).$$

Como $x_n \to x$, para todo $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in B(x, r), \qquad n \geq n_0.$$

Além disso, existem infinitos índices n tais que $F(x_n) < t$. Logo, para todo $r > 0$ existe um índice suficientemente grande tal que $x_n \in B(x, r)$ e $x_n \notin \{F > t\}$. Assim,

$$B(x, r) \not\subset \{F > t\},$$

o que mostra que $\{F > t\}$ não é aberto. Reciprocamente, suponhamos que $\{F > t\}$ não seja aberto. Então, existe uma sucessão (x_n) convergindo para $x \in X$ tal que

$$F(x_n) \leq t < F(x), \qquad \forall n.$$

Daí segue que

$$\liminf_{n\to\infty} F(x_n) < F(x),$$

pelo que F não é semicontínua inferiormente em x. □

Nota 2.71. Uma função é contínua em x se, e somente se, é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente em x.

Exercício 17 (M)

Demonstre que o invólucro superior de uma família de funções semicontínuas inferiormente é semicontínuo inferiormente.

Nota bibliográfica

Para uma introdução à Topologia Geral, recomenda-se *Topology*, de J. R. Munkres [57]. Para um tratamento mais avançado, pode consultar-se *Topologie générale*, de N. Bourbaki [11].

Capítulo 3

Espaços duais

> "A Análise Funcional é a arte de estudar espaços infinitos com os olhos da álgebra linear."
>
> — Stefan Banach, *Théorie des opérations linéaires*, 1932

Os espaços duais constituem um dos instrumentos centrais da Análise Funcional. A cada espaço vetorial normado associa-se o espaço dos seus funcionais lineares e contínuos, permitindo estudar os elementos do espaço original através da sua ação sobre aplicações escalares. Esta perspetiva desempenhará um papel fundamental na representação de medidas por funcionais lineares, culminando no Teorema de Representação de Riesz. Antes de introduzir formalmente o espaço dual, recordaremos algumas noções essenciais sobre espaços normados, aplicações contínuas e espaços de funções.

3.1 Normas e espaços normados

A introdução de uma norma permite medir quantitativamente o tamanho dos vetores e transforma um espaço vetorial num espaço onde faz sentido estudar convergência, continuidade e completude.

Definição 3.1 (Norma)**.** Seja X um espaço vetorial real. Uma **norma** em X é uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz, para todos $u, v \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\|u\| > 0$ se $u \neq 0$;
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$;
3. $$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Um **espaço normado real** é um espaço vetorial real munido de uma norma.

Nota 3.2. Toda norma induz naturalmente uma distância através da fórmula

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Assim, todo espaço normado é, em particular, um espaço métrico.

Exemplo 3.3. Os espaços

$$\mathbb{R}^n, \qquad \ell^p, \qquad L^p(\Omega), \qquad \mathcal{C}([0, 1])$$

munidos das suas normas usuais constituem exemplos fundamentais de espaços normados.

Teorema 3.4. *Seja E um espaço vetorial normado. A dimensão de E é finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Definição 3.5 (Espaço de Banach)**.** Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.

Nota histórica

O livro *Théorie des opérations linéaires (1932)* de Stefan Banach (1892–1945) marcou o nascimento da Análise Funcional moderna. Nele surgem de forma sistemática os espaços normados completos que hoje levam o seu nome.

3.2 Aplicações contínuas

Em Análise Funcional, mais importante do que estudar apenas espaços vetoriais é compreender as aplicações que preservam a sua estrutura. Os operadores contínuos constituem os morfismos naturais da categoria dos espaços normados. Nos espaços métricos, ela pode ser caracterizada através do comportamento das sucessões, critério que utilizaremos frequentemente ao longo destas notas.

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos.

Teorema 3.6 (Caracterização sequencial da continuidade)**.** *Uma aplicação $F : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, é sequencialmente contínua em a, isto é,*

$$x_n \longrightarrow a \quad \Longrightarrow \quad F(x_n) \longrightarrow F(a).$$

Demonstração. Suponhamos que F é contínua em a. Seja V uma vizinhança aberta de $F(a)$. Então $F^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a. Como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in F^{-1}(V), \qquad n \geq N.$$

Consequentemente, $F(x_n) \in V$ para todo $n \geq N$, o que mostra que $F(x_n) \to F(a)$.

Reciprocamente, suponhamos que F não é contínua em a. Existe então $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $y \in X$ satisfazendo

$$d_X(a, y) < \delta \quad \text{e} \quad d_Y\big(F(a), F(y)\big) \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos $y_n \in X$ correspondente a $\delta = 1/n$. Temos $y_n \to a$, mas

$$d_Y\big(F(a), F(y_n)\big) \geq \varepsilon_0,$$

pelo que $F(y_n) \not\to F(a)$. □

Nota 3.7. A caracterização sequencial da continuidade é válida nos espaços métricos. Em espaços topológicos gerais, a continuidade sequencial pode não ser equivalente à continuidade.

Definição 3.8 (Convergência uniforme)**.** Uma sucessão de aplicações

$$F_n : X \longrightarrow Y$$

converge **uniformemente** para uma aplicação $F : X \to Y$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad d_Y\big(F_n(x), F(x)\big) \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in X.$$

Nota 3.9. Na convergência uniforme, o índice N depende apenas de ε, e não do ponto $x \in X$. Esta é a diferença essencial relativamente à convergência pontual.

Exercício 18 (F)

Seja $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = x^n.$$

Determine:

1. o limite pontual $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$;
2. se (F_n) converge uniformemente em $[0, 1]$;
3. se a convergência é uniforme em $[0, a]$, com $0 < a < 1$.

Exercício 19 (F)

Seja $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Determine

1. o limite pontual da sucessão (F_n);
2. se (F_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$;
3. se a convergência é uniforme em qualquer intervalo limitado $[-A, A]$.

3.2.1 Principais espaços de aplicações

Nesta secção introduzimos alguns dos espaços de aplicações que serão utilizados ao longo destas notas. Eles constituem o enquadramento natural para o estudo da convergência

uniforme e dos operadores lineares em espaços de funções.

Definição 3.10. Sejam X e Y espaços topológicos.
Denotemos por

- $\mathcal{C}(X,Y)$ o espaço das aplicações contínuas de X em Y;
- $\mathcal{B}(X,Y)$ o espaço das aplicações limitadas;
- $\mathcal{BC}(X,Y)$ o espaço das aplicações contínuas e limitadas;
- $\mathcal{C}_c(X,Y)$ o espaço das aplicações contínuas com suporte compacto em X.

Quando $Y=\mathbb{R}$, escreveremos simplesmente

$$\mathcal{C}(X), \qquad \mathcal{B}(X), \qquad \mathcal{BC}(X), \qquad \mathcal{C}_c(X).$$

Nota 3.11. Quando Y é um espaço vetorial normado, todos estes espaços podem ser munidos da métrica uniforme

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)),$$

sempre que esta quantidade seja finita.
A definição do espaço $\mathcal{C}_0(X)$ será apresentada na secção seguinte.

3.2.2 Norma do supremo

A norma do supremo mede o maior desvio entre duas aplicações e constitui a norma natural associada à convergência uniforme.

Definição 3.12 (Norma do supremo)**.** Seja Y um espaço vetorial normado.
Para $F\in\mathcal{B}(X,Y)$ define-se

$$\|F\|_\infty := \sup_{x\in X}\|F(x)\|_Y.$$

Nota 3.13. Se X for compacto, toda aplicação contínua é limitada. Assim,

$$\mathcal{C}(X,Y)=\mathcal{BC}(X,Y),$$

pelo que a norma do supremo fica igualmente bem definida em $\mathcal{C}(X,Y)$.

Proposição 3.14. *Uma sucessão $(F_n)\subset\mathcal{B}(X,Y)$ converge uniformemente para $F\in\mathcal{B}(X,Y)$ se, e somente se,*

$$\|F_n-F\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Resulta imediatamente das definições de convergência uniforme e de norma do supremo. □

3.2.3 O espaço $\mathcal{C}_c(X)$

Ao longo desta secção suporemos que X é um espaço localmente compacto de Hausdorff.

Definição 3.15 (Suporte)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
O *suporte* de f é o conjunto

$$\operatorname{spt}(f) := \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 3.16. Denotamos por

$$\mathcal{C}_c(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : \operatorname{spt}(f) \text{ é compacto}\}$$

o espaço das funções contínuas com suporte compacto.

Exemplo 3.17. A função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, pois

$$\operatorname{spt}(f) = [-1, 1].$$

Nota 3.18. O espaço $\mathcal{C}_c(X)$ desempenha um papel central em Análise, nomeadamente na teoria das distribuições e na construção de medidas. Contudo, $\mathcal{C}_c(X)$ não é, em geral, estável para a convergência uniforme: uma sucessão de funções de suporte compacto pode convergir uniformemente para uma função cujo suporte já não seja compacto.
Esta observação motiva a introdução de um espaço maior, fechado para a norma do supremo.

3.2.4 O espaço $\mathcal{C}_0(X)$

Pretendemos agora construir um espaço de Banach que contenha $\mathcal{C}_c(X)$ e seja estável para a convergência uniforme.

Definição 3.19. Define-se

$$\mathcal{C}_0(X) = \overline{\mathcal{C}_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty},$$

isto é, $\mathcal{C}_0(X)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c(X)$ para a norma do supremo.

Teorema 3.20 (Caracterização de $\mathcal{C}_0(X)$)**.** *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então,*

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : \forall \varepsilon > 0, \ \{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ é compacto}\}.$$

Equivalentemente, $f \in \mathcal{C}_0(X)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto

$K \subset X$ tal que

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad x \notin K.$$

Neste caso, diz-se que f se anula no infinito.

Teorema 3.21. *O espaço $(\mathcal{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Nota 3.22. Se X é compacto, então a condição que caracteriza as funções de $\mathcal{C}_0(X)$ é automaticamente satisfeita. De facto, para toda $f \in \mathcal{C}(X)$ e todo $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

é fechado em X e, portanto, compacto. Consequentemente,

$$\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}(X).$$

Assim, a distinção entre $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}_0(X)$ só se torna relevante quando o espaço subjacente não é compacto.

3.2.5 Teorema de Heine–Cantor

Em geral, uma aplicação contínua não é necessariamente uniformemente contínua. No entanto, quando o domínio é compacto, a continuidade implica automaticamente continuidade uniforme.

Teorema 3.23 (Heine–Cantor)**.** *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Se X é compacto e*

$$F : X \longrightarrow Y$$

é contínua, então F é uniformemente contínua.

Demonstração. Ver Exercício. □

Nota 3.24. A hipótese de compacidade é indispensável. Por exemplo, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua, mas não é uniformemente contínua.

Exercício 20 (F)

Demonstrar o Teorema de Heine–Cantor.

3.2.6 Completude

O conceito de completude desempenha um papel central em Análise Funcional. Uma das principais vantagens dos espaços $\mathcal{B}(X, Y)$, $\mathcal{BC}(X, Y)$ e $\mathcal{C}_0(X, Y)$ é que são fechados relativamente à convergência uniforme, desde que o espaço de chegada seja completo.

Teorema 3.25. *Se Y é um espaço de Banach, então*

$$\mathcal{B}(X,Y), \qquad \mathcal{BC}(X,Y) \quad e \quad \mathcal{C}_0(X,Y),$$

munidos da norma do supremo, são espaços de Banach.

Demonstração. Demonstremos o resultado para $\mathcal{BC}(X,Y)$.

(f_n) uma sucessão de Cauchy para a norma do supremo. Então, para cada $x \in X$, a sucessão $(f_n(x))$ é de Cauchy em Y. Como Y é completo, existe

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Além disso,

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0,$$

isto é, a convergência é uniforme. Como o limite uniforme de funções contínuas é contínuo, concluímos que $f \in \mathcal{BC}(X,Y)$. □

Corolário 3.26. *Se X é compacto e Y é um espaço de Banach, então*

$$\mathcal{C}(X,Y)$$

é um espaço de Banach para a norma do supremo.

Demonstração. Pelo Teorema de Heine–Cantor, $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{BC}(X,Y)$, pelo que basta aplicar o teorema anterior. □

Nota 3.27. O espaço $\mathcal{C}_c(X,Y)$ não é, em geral, completo. O seu fecho para a norma do supremo é precisamente $\mathcal{C}_0(X,Y)$.

Exercício 21 (F)

Construa um exemplo que mostre que $\mathcal{C}^\infty(X,Y)$ não é completo para a norma do supremo.

Exercício 22 (F)

Construa um exemplo que mostre que $\mathcal{C}_c(X,Y)$ não é completo para a norma do supremo.

3.3 Partes positivas e negativas de uma função

Em muitas situações é conveniente decompor uma função real na diferença de duas funções não negativas. Esta decomposição é única e desempenha um papel importante no estudo de funcionais positivos. Toda função real admite uma decomposição em parte positiva e parte negativa. No espaço $\mathcal{C}_0(X)$, esta decomposição reveste-se de particular importância,

pois a continuidade é preservada e a ordem natural das funções desempenha um papel fundamental no estudo dos funcionais positivos e na representação de Riesz.

Definição 3.28. Seja X um conjunto e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Definem-se a *parte positiva* e a *parte negativa* de f por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

para todo $x \in X$.

As funções f^+ e f^- são não negativas e têm suportes disjuntos.

Proposição 3.29. *Para toda a função real f verificam-se as identidades*

$$f = f^+ - f^-,$$

$$|f| = f^+ + f^-,$$

e

$$f^+ f^- = 0.$$

Demonstração. Se $f(x) \geq 0$, então

$$f^+(x) = f(x), \qquad f^-(x) = 0,$$

pelo que

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

e

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Se, pelo contrário, $f(x) < 0$, então

$$f^+(x) = 0, \qquad f^-(x) = -f(x),$$

obtendo-se novamente as duas identidades. Finalmente, em cada ponto pelo menos uma das funções f^+ e f^- é nula, pelo que $f^+ f^- = 0$. □

Nota 3.30. As fórmulas

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

mostram que as partes positiva e negativa dependem continuamente de f. Além disso, se f é contínua, então também f^+ e f^- são contínuas.

Exercício 23 (M)

Mostre que, se $f \in \mathcal{C}(X)$, então $f^+, f^- \in \mathcal{C}(X)$.

3.4 Aplicações aditivas e limitadas; aplicações lineares e contínuas

Antes de introduzir o espaço dual é conveniente estudar algumas propriedades das aplicações entre espaços vetoriais normados. Começamos pelas aplicações aditivas e mostramos que uma hipótese de limitação implica automaticamente a continuidade e a linearidade.

3.4.1 Aplicações aditivas

Definição 3.31. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $A : V \longrightarrow W$ diz-se *aditiva* se

$$A(u+v) = A(u) + A(v), \qquad \forall\, u, v \in V.$$

A aditividade implica imediatamente algumas propriedades elementares.

Proposição 3.32. *Se $A : V \to W$ é aditiva, então*

$$A(0) = 0, \qquad A(-u) = -A(u),$$

e, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$A(nu) = nA(u).$$

Além disso,

$$A(qu) = qA(u), \qquad \forall\, q \in \mathbb{Q}.$$

Demonstração. Tomando $u = v = 0$ obtém-se

$$A(0) = A(0) + A(0),$$

logo $A(0) = 0$. Da identidade $0 = A(u + (-u))$ segue $A(-u) = -A(u)$. A igualdade $A(nu) = nA(u)$ obtém-se por indução. Finalmente, para $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, temos

$$nA(qu) = A(nqu) = A(mu) = mA(u),$$

o que conclui a demonstração. □

3.4.2 Aplicações limitadas

Definição 3.33. Sejam V e W espaços normados. Uma aplicação $A : V \longrightarrow W$ diz-se *limitada* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A(u)\| \leq C\|u\|, \qquad \forall\, u \in V.$$

Teorema 3.34. *Toda aplicação aditiva limitada é contínua.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão convergente para u. Então,

$$A(u_n) - A(u) = A(u_n - u),$$

e, pela limitação,

$$\|A(u_n) - A(u)\| \leq C\|u_n - u\|.$$

Como $u_n \to u$, segue imediatamente que $A(u_n) \to A(u)$. □

Teorema 3.35. *Toda aplicação aditiva limitada é linear.*

Demonstração. Já sabemos que

$$A(qu) = qA(u), \qquad q \in \mathbb{Q}.$$

Seja agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e escolha uma sucessão racional (q_n) tal que $q_n \to \lambda$. Como $q_n u \to \lambda u$ e A é contínua,

$$A(\lambda u) = \lim_n A(q_n u) = \lim_n q_n A(u) = \lambda A(u).$$

Logo,

$$A(\lambda u) = \lambda A(u), \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

isto é, A é linear. □

Nota 3.36. Mais adiante estudaremos outras hipóteses de regularidade que garantem a continuidade de uma aplicação aditiva. Em particular, mostraremos, num quadro apropriado, que a mensurabilidade exclui as soluções patológicas da equação funcional de Cauchy.

3.4.3 Aplicações lineares e contínuas

A linearidade exprime a compatibilidade com a estrutura algébrica do espaço, enquanto a continuidade traduz a estabilidade relativamente à convergência. Um dos resultados fundamentais da Análise mostra que, em muitas situações, ambas as propriedades estão intimamente relacionadas.

Definição 3.37. Uma aplicação $A : V \longrightarrow W$ diz-se *linear* se

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v),$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$.

Teorema 3.38. *Se $A : V \to W$ é linear, são equivalentes:*

1. *A é contínua;*
2. *A é contínua na origem;*
3. *A é limitada.*

Demonstração. A implicação (1) ⇒ (2) é imediata. Suponhamos (2). Existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\| < \delta \Longrightarrow \|A(u)\| < 1.$$

Se $u \neq 0$,aplicamos esta desigualdade ao vetor $v = \frac{\delta}{2\|u\|}u$, obtendo $\|A(u)\| \leq \frac{2}{\delta}\|u\|$. Logo A é limitada. Finalmente, se A é limitada,

$$\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\| \leq C\|u - v\|,$$

o que mostra que A é contínua. □

Nota 3.39. Assim, para aplicações lineares entre espaços normados, os conceitos de continuidade e limitação são equivalentes. Esta equivalência será utilizada constantemente no estudo dos espaços duais.

Corolário 3.40. *Seja $A : V \to W$ uma aplicação linear entre espaços normados. Então A é contínua se, e somente se,*

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|A(u)\|_W}{\|u\|_V} < +\infty.$$

Nesse caso,

$$\|A(u)\|_W \leq C\|u\|_V, \qquad \forall\, u \in V,$$

onde

$$C = \sup_{u \neq 0} \frac{\|A(u)\|_W}{\|u\|_V}.$$

Nota 3.41. Uma aplicação linear contínua entre espaços normados é frequentemente designada por aplicação linear limitada.

Exemplo 3.42. Considere-se o espaço $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, munido da norma do supremo, e a aplicação

$$D_0 : \mathcal{C}^\infty([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad D_0(f) = f'(0).$$

A aplicação D_0 é linear, mas não é contínua. Com efeito, para $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$, temos $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, enquanto $D_0(f_n) = f_n'(0) = n$. Logo, $D_0(f_n)$ não converge para 0.

3.4.4 Núcleo de uma forma linear

Proposição 3.43. *Seja V um espaço vetorial normado e seja $A : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear não nula. Então A é contínua se, e somente se,* $\ker A$ *é fechado.*

Demonstração. Se A é contínua, então $\ker A = A^{-1}(\{0\})$ é fechado. Reciprocamente, suponhamos que $H := \ker A$ é fechado. Escolha-se $y \in V$ tal que $A(y) = 1$. Como $y \notin H$ e H é fechado, $d(y, H) > 0$. Seja $\delta := d(y, H)$. Para todo $u \in V$ tal que $A(u) \neq 0$, temos $A\left(\frac{u}{A(u)}\right) = 1$. Por conseguinte,

$$\frac{u}{A(u)} - y \in H.$$

Logo, pela definição de δ,

$$\delta \leq \left\| y - \left(y - \frac{u}{A(u)} \right) \right\|_V = \left\| \frac{u}{A(u)} \right\|_V = \frac{\|u\|_V}{|A(u)|}.$$

Portanto,

$$|A(u)| \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_V.$$

A desigualdade é também válida quando $A(u) = 0$. Assim, A é limitada e, portanto, contínua. □

> *Nota* 3.44. A hipótese de que A não é nula serve apenas para escolher $y \in V$ tal que $A(y) = 1$. O funcional nulo é contínuo e o seu núcleo é todo o espaço V.

3.5 O espaço dual normado

O espaço dual reúne todos os funcionais lineares e contínuos definidos num espaço normado. Esta construção permite estudar um espaço através das aplicações nele definidas e constitui um dos pilares da Análise Funcional moderna.

> **Definição 3.45.** Seja V um espaço vetorial normado real.
> O *espaço dual* de V é o espaço
>
> $$V' = \{A : V \longrightarrow \mathbb{R} : A \text{ é linear e contínua}\}.$$

Como a soma de dois funcionais lineares contínuos e o produto de um funcional linear contínuo por um escalar são ainda lineares e contínuos, V' é um espaço vetorial.

> **Definição 3.46.** Para $A \in V'$, define-se a *norma do dual* por
>
> $$\|A\|_{V'} = \sup_{\|u\|_V \leq 1} |A(u)|.$$

> **Proposição 3.47.** *Para todo $A \in V'$, temos*
>
> $$\|A\|_{V'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|A(u)|}{\|u\|_V}.$$
>
> *Além disso,*
>
> $$|A(u)| \leq \|A\|_{V'} \|u\|_V, \qquad \forall\, u \in V.$$

Demonstração. Se $u \neq 0$, então

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_V} \right\|_V = 1,$$

e, pela linearidade,

$$|A(u)| = \|u\|_V \left| A\left(\frac{u}{\|u\|_V} \right) \right| \leq \|A\|_{V'} \|u\|_V.$$

Consequentemente,

$$\sup_{u\neq 0}\frac{|A(u)|}{\|u\|_V}\leq \|A\|_{V'}.$$

Reciprocamente, para todo u com $\|u\|_V\leq 1$,

$$|A(u)|\leq \sup_{v\neq 0}\frac{|A(v)|}{\|v\|_V}.$$

Tomando o supremo em u, obtemos a desigualdade inversa. □

Proposição 3.48. *A aplicação*

$$A\longmapsto \|A\|_{V'}$$

é uma norma em V'.

Demonstração. É imediato que $\|A\|_{V'}\geq 0$. Se $\|A\|_{V'}=0$, então

$$|A(u)|\leq \|A\|_{V'}\|u\|_V=0$$

para todo $u\in V$, e portanto $A=0$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\|\lambda A\|_{V'}=\sup_{\|u\|_V\leq 1}|\lambda A(u)|=|\lambda|\,\|A\|_{V'}.$$

Finalmente, para $A,B\in V'$,

$$\|A+B\|_{V'}=\sup_{\|u\|_V\leq 1}|A(u)+B(u)|\leq \sup_{\|u\|_V\leq 1}|A(u)|+\sup_{\|u\|_V\leq 1}|B(u)|=\|A\|_{V'}+\|B\|_{V'}.$$

□

Nota 3.49. A norma $\|A\|_{V'}$ é a menor constante $C\geq 0$ para a qual

$$|A(u)|\leq C\|u\|_V,\qquad \forall\, u\in V.$$

Equivalentemente,

$$\|A\|_{V'}=\inf\left\{C\geq 0:|A(u)|\leq C\|u\|_V \text{ para todo } u\in V\right\}.$$

Teorema 3.50. *O espaço dual V', munido da norma do dual, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (A_n) uma sucessão de Cauchy em V'. Para todo $u\in V$,

$$|A_n(u)-A_m(u)|\leq \|A_n-A_m\|_{V'}\|u\|_V.$$

Logo, $(A_n(u))$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. Definamos

$$A(u)=\lim_{n\to\infty}A_n(u).$$

A linearidade de A resulta da linearidade de cada A_n e da passagem ao limite. Como (A_n) é de Cauchy, é limitada em V': existe $M > 0$ tal que

$$\|A_n\|_{V'} \leq M, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $|A_n(u)| \leq M\|u\|_V$. Passando ao limite,

$$|A(u)| \leq M\|u\|_V,$$

pelo que A é contínua e pertence a V'. Fixemos $\varepsilon > 0$. Existe N tal que

$$\|A_n - A_m\|_{V'} \leq \varepsilon, \qquad m, n \geq N.$$

Para $n \geq N$ e $\|u\|_V \leq 1$, passando ao limite quando $m \to \infty$, obtemos

$$|A_n(u) - A(u)| \leq \varepsilon.$$

Logo,

$$\|A_n - A\|_{V'} \leq \varepsilon, \qquad n \geq N.$$

Portanto, $A_n \to A$ em V'. □

Nota 3.51. A completude de V' não exige que V seja completo.

3.5.1 Exemplos de funcionais lineares contínuos

Exemplo 3.52 (Avaliação num ponto)**.** Seja X um espaço topológico e seja $x_0 \in X$. A aplicação

$$\delta_{x_0} : \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_{x_0}(f) = f(x_0),$$

é linear e satisfaz

$$|\delta_{x_0}(f)| \leq \|f\|_\infty.$$

Logo, $\|\delta_{x_0}\| \leq 1$. Se existe $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tal que $\|f\|_\infty = 1$ e $f(x_0) = 1$, então $\|\delta_{x_0}\| = 1$.

Exemplo 3.53 (Funcional integral)**.** Em $\mathcal{C}([0,1])$, consideremos

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

O funcional I é linear e

$$|I(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \|f\|_\infty.$$

Logo, $\|I\| \leq 1$ Como $I(\mathbf{1}) = 1$ e $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$, concluímos que $\|I\| = 1$.

Exemplo 3.54. Sejam $a, b \geq 0$, com $a + b = 1$, e definamos

$$A(f) = af(0) + bf(1), \qquad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Então

$$|A(f)| \leq a|f(0)| + b|f(1)| \leq (a+b)\|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Logo, $\|A\| \leq 1$. Aplicando A à função constante $\mathbf{1}$, obtemos

$$\|A\| = 1.$$

Exercício 24 (M)

Seja $A \in V'$. Mostre que

$$\|A\|_{V'} = \inf\{C > 0 : |A(u)| \leq C\|u\|_V, \quad \forall\, u \in V\}.$$

Conclua que $\|A\|_{V'}$ é a menor constante para a qual vale a desigualdade

$$|A(u)| \leq C\|u\|_V, \qquad \forall\, u \in V.$$

Exercício 25 (F)

Mostre que a aplicação $A \longmapsto \|A\|_{V'}$ define uma norma no espaço dual V'.

Exercício 26 (M)

Mostre que a aplicação $V \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \|u\|_V$, é contínua.

Nota 3.55. Quando X é um espaço localmente compacto de Hausdorff, define-se $\mathcal{C}_0(X)$ como o espaço das funções contínuas que se anulam no infinito. Nestas hipóteses, toda função de $\mathcal{C}_0(X)$ é limitada. Consequentemente, a norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

está bem definida. No caso particular $X = \mathbb{R}^n$, esta condição é equivalente a

$$f(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } |x| \longrightarrow +\infty.$$

Exercício 27 (M)

Justifique a observação anterior.

1. Mostre que, se
$$\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$$
é compacto para todo $\varepsilon > 0$, então f é limitada.
2. Conclua que $\|f\|_\infty < +\infty$.
3. Mostre que, quando $X = \mathbb{R}^n$, a condição
$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ é compacto para todo } \varepsilon > 0$$
é equivalente a
$$f(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } |x| \longrightarrow +\infty.$$

‘‘‘

Exercício 28 (D)

Seja V um espaço vetorial normado e $A : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear não identicamente nula. Mostre que A é contínua se, e somente se,

$$\ker(A)$$

é um subconjunto fechado de V.

Exercício 29 (F)

Seja $u : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$

1. Verifique que u é um funcional linear.
2. Mostre que u é positivo, isto é,

$$f \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq 0.$$

3. Utilize a desigualdade $|u(f)| \leq u(|f|)$ para mostrar que u é contínuo.
4. Calcule $\|u\|$.

Exercício 30 (F)

Sejam $a, b \geq 0$ e $a + b = 1$. Considere

$$v : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v(f) = af(0) + bf(1).$$

1. Verifique que v é um funcional linear.
2. Mostre que v é positivo.
3. Utilize a desigualdade
$$|v(f)| \leq v(|f|)$$
para mostrar que v é contínuo.
4. Calcule $\|v\|$.

Exercício 31 (F)

Seja $x_0 \in [0,1]$. Considere o funcional de avaliação

$$\delta_{x_0} : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_{x_0}(f) = f(x_0).$$

1. Verifique que δ_{x_0} é um funcional linear.
2. Mostre que δ_{x_0} é positivo.
3. Mostre que δ_{x_0} é contínuo.
4. Calcule $\|\delta_{x_0}\|$.

Nota histórica

Frigyes Riesz (1880–1956) foi um dos fundadores da Análise Funcional. Os seus trabalhos sobre a representação de funcionais lineares por meio de integrais estão na

origem dos teoremas de representação que levam o seu nome [64].

Nota bibliográfica

A teoria dos espaços duais é desenvolvida sistematicamente em *Théorie des opérations linéaires*, de S. Banach [5]. Exposições modernas podem ser encontradas em *Functional Analysis*, de W. Rudin [66], *A Course in Functional Analysis*, de J. B. Conway [19], e *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de H. Brezis [12].

3.6 Convergência de aplicações

Existem várias formas naturais de uma sucessão de operadores convergir. Cada uma delas preserva propriedades diferentes e desempenha um papel específico em Análise Funcional, Equações Diferenciais e Métodos Numéricos. Nesta secção reunimos as principais noções de convergência utilizadas em Análise Funcional. Conforme o contexto, distinguiremos a convergência pontual de aplicações, a convergência forte e uniforme de operadores e, finalmente, as convergências fraca e fraca-*.

Definição 3.56 (Convergência pontual)**.** Sejam X um conjunto e Y um espaço vetorial normado. Diz-se que uma sucessão de aplicações

$$T_n : X \longrightarrow Y$$

converge *pontualmente* para

$$T : X \longrightarrow Y$$

se

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Definição 3.57 (Convergência forte e convergência em norma)**.** Sejam X e Y espaços vetoriais normados e

$$A_n, A : X \longrightarrow Y$$

operadores lineares limitados.

1. Diz-se que (A_n) converge *fortemente* para A se

$$\|A_n x - Ax\|_Y \longrightarrow 0, \qquad \forall\, x \in X.$$

2. Diz-se que (A_n) converge *em norma* (ou *uniformemente*) para A se

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A_n x - Ax\|_Y \longrightarrow 0.$$

Exercício 32 (F)

Mostre que a convergência em norma implica convergência forte.

Definição 3.58 (Convergência fraca-*)**.** Uma sucessão $(A_n) \subset V'$ converge para $A \in V'$ na *topologia fraca-** se

$$A_n(u) \longrightarrow A(u), \qquad \forall\, u \in V.$$

Neste caso escreve-se

$$A_n \rightharpoonup^* A.$$

Definição 3.59 (Convergência fraca)**.** Uma sucessão $(x_n) \subset V$ converge fracamente para $x \in V$ se

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, f \in V'.$$

Neste caso escreve-se

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Nota 3.60. A aplicação

$$\langle f, x \rangle = f(x), \qquad f \in V',\ x \in V,$$

é designada por *emparelhamento dual* entre V' e V. Esta notação será utilizada frequentemente na formulação dos resultados seguintes.

3.7 Funcionais positivos em $\mathcal{C}_0(X)$ e construção da medida

Os funcionais positivos estabelecem a primeira ligação profunda entre a Análise Funcional e a Teoria da Medida. A positividade introduz uma estrutura de ordem no espaço dual. Esta propriedade permite interpretar certos funcionais como objetos que atribuem massa às funções positivas, preparando naturalmente a construção das medidas.

Ao longo desta secção, X designa um espaço localmente compacto de Hausdorff. Recordemos que, pelos Teoremas 3.35 e 3.38, todo funcional aditivo e limitado num espaço normado é automaticamente linear e contínuo. Trabalharemos, portanto, com o espaço

$$(\mathcal{C}_0(X))^* = \{u : \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ aditivo e limitado}\}.$$

O estudo dos funcionais positivos em $\mathcal{C}_0(X)$ estabelece uma ligação profunda entre a Análise Funcional e a Teoria da Medida. O objetivo desta secção é construir, a partir de um funcional positivo, uma medida de Radon, preparando assim o Teorema da Representação de Riesz.

3.7.1 Funcionais positivos

Definição 3.61. Um funcional $u \in (\mathcal{C}_0(X))^*$ diz-se *positivo* se

$$u(f) \geq 0, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_0(X), \quad f \geq 0.$$

Denotaremos por

$$(\mathcal{C}_0(X))^+$$

o conjunto de todos os funcionais positivos.

Exercício 33 (D)

Seja $I = [a, b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e considere $\mathcal{C}(I)$ munido da norma do supremo.

1. Mostre que, para todo funcional positivo $u : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, se verifica
$$|u(f)| \leq u(|f|), \qquad \forall f \in \mathcal{C}(I).$$
2. Seja
$$e(x) = 1, \qquad x \in I.$$
Deduzir que todo funcional positivo é limitado e calcular a sua norma em função de $u(e)$.
3. Generalizar os resultados anteriores ao espaço $\mathcal{C}_0(X)$.

O resultado seguinte permite associar a qualquer funcional uma parte positiva, desempenhando um papel análogo ao da decomposição

$$f = f^+ - f^-$$

das funções reais.

3.7.2 Construção da parte positiva

Proposição 3.62. *Seja $u \in (\mathcal{C}_0(X))^*$. Para cada*

$$f \in \mathcal{C}_0(X), \qquad f \geq 0,$$

definamos

$$u^+(f) = \sup \{u(g) : g \in \mathcal{C}_0(X),\ 0 \leq g \leq f\}.$$

Então:

1. $u^+(f) \geq 0$;
2. $$u^+(\lambda f) = \lambda u^+(f), \qquad \forall \lambda \geq 0;$$
3. $$u^+(f_1 + f_2) = u^+(f_1) + u^+(f_2), \qquad \forall f_1, f_2 \geq 0.$$

Em particular, u^+ define um funcional positivo sobre o cone $\mathcal{C}_0(X)^+$.

Demonstração. Como u é limitado,

$$|u(g)| \leq \|u\|\, \|g\|_\infty \leq \|u\|\, \|f\|_\infty,$$

para todo $0 \leq g \leq f$. Logo, o supremo que define $u^+(f)$ é finito. A homogeneidade positiva é imediata. Provemos a aditividade. Seja $\varepsilon > 0$. Escolhem-se funções $g_i \leq f_i$ tais que

$$u^+(f_i) < u(g_i) + \varepsilon, \qquad i = 1, 2.$$

Então

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2,$$

e, por conseguinte,

$$u^+(f_1 + f_2) \geq u(g_1 + g_2) = u(g_1) + u(g_2) > u^+(f_1) + u^+(f_2) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$,

$$u^+(f_1 + f_2) \geq u^+(f_1) + u^+(f_2).$$

Reciprocamente, seja $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. Definamos

$$g_1 = \min(g, f_1), \qquad g_2 = g - g_1.$$

Então $0 \leq g_i \leq f_i$, e

$$u(g) = u(g_1) + u(g_2) \leq u^+(f_1) + u^+(f_2).$$

Tomando o supremo relativamente a g, obtemos

$$u^+(f_1 + f_2) \leq u^+(f_1) + u^+(f_2).$$

Logo,

$$u^+(f_1 + f_2) = u^+(f_1) + u^+(f_2).$$

□

Proposição 3.63 (Prolongamento da parte positiva)**.** *O funcional $u^+ : \mathcal{C}_0(X)^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, inicialmente definido sobre o cone das funções positivas, admite uma única extensão a um funcional positivo de $(\mathcal{C}_0(X))^*$.*

Nota 3.64. A prova é simples uma vez demonstrado o teorema de representação de Riesz, que será feita no final da cadeira.

Demonstração. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única medida de Radon positiva μ tal que

$$u^+(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_0(X)^+.$$

Definimos então, para todo $f \in \mathcal{C}_0(X)$,

$$u^+(f) := \int_X f \, d\mu.$$

Esta aplicação é aditiva, limitada e positiva, coincidindo com a definição anterior sobre o cone $\mathcal{C}_0(X)^+$. A unicidade segue imediatamente da unicidade da medida de Radon. □

3.7.3 Decomposição de Jordan

Teorema 3.65 (Decomposição de Jordan)**.** *Todo funcional $u \in (\mathcal{C}_0(X))^*$ admite uma decomposição*

$$u = u^+ - u^-,$$

onde $u^+, u^- \in (\mathcal{C}_0(X))^+$. Além disso, $\|u^+\|, \|u^-\| \leq \|u\|$.

Demonstração. Define-se $u^- := u^+ - u$. Como

$$u^+(f) \geq u(f), \qquad f \geq 0,$$

segue que $u^-(f) \geq 0$, isto é, u^- é positivo. A identidade $u = u^+ - u^-$ é imediata. Finalmente, $u^- := (-u)^+$, de onde $\|u^-\| = \|(-u)^+\| \leq \|u\|$. A mesma estimativa vale para u^+.

□

Nota 3.66. A decomposição de Jordan constitui o análogo funcional da decomposição

$$f = f^+ - f^-,$$

das funções reais.

Nota histórica

A ideia de representar funcionais lineares positivos por meio de medidas remonta aos trabalhos de Frigyes Riesz, em 1909 [64], e está na origem de um dos resultados fundamentais da Análise: o Teorema da Representação de Riesz–Markov–Kakutani.

Nota bibliográfica

A teoria dos funcionais lineares positivos e a sua relação com a integração e a teoria da medida são desenvolvidas em *Real and Complex Analysis*, de W. Rudin [68], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B. Folland [31], e *Intégration*, de N. Bourbaki [10].

3.7.4 Medida (exterior) associada a um funcional positivo

A construção seguinte mostra como um funcional positivo determina naturalmente uma noção de tamanho dos subconjuntos de X. A medida exterior constitui o primeiro passo para a construção rigorosa de uma medida.

O objetivo desta secção é associar a um funcional positivo em $\mathcal{C}_0(X)$ uma medida exterior sobre X. Veremos que esta construção conduz naturalmente a uma medida regular, estabelecendo a ligação entre funcionais positivos e a Teoria da Medida.

Seja $u \geq 0$ em $(\mathcal{C}_0(X))^*$.

Definição 3.67 (Pré-medida nos abertos)**.** Para $U \subset X$ aberto, definimos

$$\mu(U) = \sup\{u(f) : f \in \mathcal{C}_0(X),\ 0 \leq f \leq 1,\ \operatorname{spt}(f) \subset U\}.$$

A ideia consiste em medir um conjunto não diretamente, mas através de aproximações por abertos. Esta filosofia, introduzida por Carathéodory, constitui uma das construções mais elegantes da Teoria da Medida.

Definição 3.68 (Medida exterior)**.** Para qualquer $E \subset X$, definimos

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Definição 3.69. Uma aplicação

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

é chamada *medida exterior* se satisfaz:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. (Subaditividade)
$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Teorema 3.70. *Seja $u \geq 0$ um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(X)$. Então a aplicação μ^* definida acima é uma medida exterior.*

Demonstração. Sejam U_i abertos e

$$U = \bigcup_i U_i.$$

Se $f \in \mathcal{C}_0(X)$ satisfaz

$$0 \leq f \leq 1, \qquad \text{spt}(f) \subset U,$$

então $\text{spt}(f)$ é compacto e, portanto, está contido numa união finita de $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$. Por uma partição da unidade, existem funções $g_j \in \mathcal{C}_0(X)$ tais que

- $\text{spt}(g_j) \subset U_{i_j}$;
- $\sum_{j=1}^{k} g_j = 1$ numa vizinhança de $\text{spt}(f)$.

Assim,

$$f = \sum_{j=1}^{k} g_j f.$$

Além disso,

$$0 \leq g_j f \leq 1, \qquad \text{spt}(g_j f) \subset U_{i_j}.$$

Logo, pela definição de $\mu(U_{i_j})$,

$$u(g_j f) \leq \mu(U_{i_j}).$$

Pela linearidade de u,

$$u(f) = \sum_{j=1}^{k} u(g_j f) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(U_{i_j}).$$

Tomando o supremo em f, obtemos

$$\mu(U) \leq \sum_i \mu(U_i).$$

As propriedades $\mu^*(\varnothing) = 0$ e a monotonicidade seguem imediatamente da definição. A subaditividade decorre da desigualdade anterior, tomando o ínfimo sobre todos os recobrimentos abertos de cada conjunto. □

Capítulo 4

Integral de Riemann

4.1 Integral de Riemann a 1d

A noção de integral foi introduzida em Cálculo para medir áreas, volumes e outras grandezas geométricas. O objetivo deste capítulo é apresentar uma definição rigorosa da integral de uma função limitada definida num intervalo compacto. Seguiremos a abordagem de Darboux, baseada nas somas inferior e superior. Embora equivalente à definição original de Riemann, esta formulação é particularmente conveniente para estabelecer os principais critérios de integrabilidade e servirá de ponto de partida para a teoria da integral de Lebesgue.

Nota histórica

A teoria da integração foi introduzida por Bernhard Riemann (1826–1866) na sua memória de habilitação de 1854, publicada postumamente em 1867. O objetivo inicial era fornecer um fundamento rigoroso para o desenvolvimento em séries de Fourier. Poucos anos mais tarde, Gaston Darboux (1842–1917) mostrou que a mesma teoria podia ser formulada exclusivamente em termos das somas inferior e superior, sem recorrer às somas de Riemann. Pela sua simplicidade e elegância, esta abordagem é hoje a mais utilizada nos cursos introdutórios de Análise.

Para simplificar a exposição, tratamos apenas o caso unidimensional. Consideremos uma função limitada

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},$$

onde $[a, b]$ é um intervalo limitado.

Definição 4.1 (Partição)**.** Seja $I = [a, b]$. Uma partição P de I é um conjunto finito de subintervalos $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ tais que

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,$$

e dois subintervalos distintos intersectam-se no máximo num ponto extremo comum.

Definição 4.2 (Refinamento)**.** Se P e P' são partições de I, dizemos que P' é um refinamento de P se cada subintervalo de P é união de um ou mais subintervalos de P'.

Denotemos por $\mathcal{P}(I)$ o conjunto de todas as partições de I.

Definição 4.3 (Somas de Darboux)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada e $P = \{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{P}(I)$. Definamos

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x).$$

As somas inferior e superior de Darboux são dadas por

$$L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, |I_k|, \qquad U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \, |I_k|.$$

Lema 4.4 (Refinamento da partição)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada. Se P' é um refinamento de P, então*

$$L(f;P') \geq L(f;P), \qquad U(f;P') \leq U(f;P).$$

Demonstração. Considere-se um subintervalo I_n da partição P decomposto em subintervalos de P':

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{K_n} I'_k.$$

Como $I'_k \subset I_n$, temos

$$\inf_{I'_k} f \geq \inf_{I_n} f, \qquad \sup_{I'_k} f \leq \sup_{I_n} f.$$

Por conseguinte,

$$\sum_{k=1}^{K_n} \inf_{I'_k} f \, |I'_k| \geq \inf_{I_n} f \sum_{k=1}^{K_n} |I'_k| = \inf_{I_n} f \, |I_n|,$$

e, analogamente,

$$\sum_{k=1}^{K_n} \sup_{I'_k} f \, |I'_k| \leq \sup_{I_n} f \sum_{k=1}^{K_n} |I'_k| = \sup_{I_n} f \, |I_n|.$$

Somando estas desigualdades sobre todos os subintervalos de P, obtemos

$$L(f;P') \geq L(f;P), \qquad U(f;P') \leq U(f;P).$$

□

Definição 4.5 (Integrais inferior e superior de Darboux)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada. Define-se a integral inferior de Darboux por

$$\mathcal{L}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} L(f;P),$$

e a integral superior de Darboux por

$$\mathcal{U}(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} U(f;P).$$

Proposição 4.6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada. Então*

$$\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f).$$

Demonstração. Sejam $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ e seja R um refinamento comum de P e Q. Pelo lema anterior,

$$L(f;P) \leq L(f;R) \leq U(f;R) \leq U(f;Q).$$

Fixando Q e tomando o supremo em P, obtemos $\mathcal{L}(f) \leq U(f;Q)$. Tomando agora o ínfimo em Q, concluímos que $\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$. □

Definição 4.7 (Integral de Riemann)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável, ou Riemann-integrável, em I se

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f).$$

O valor comum é designado por integral de Riemann de f em I e denota-se por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 4.8 (Contraexemplo 1)**.** A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

não é Riemann-integrável em $[0,1]$, pois não é limitada numa vizinhança de 0.

Exemplo 4.9 (Contraexemplo 2: função de Dirichlet)**.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

não é Riemann-integrável.
Com efeito, todo o subintervalo não degenerado de $[0,1]$ contém números racionais e irracionais. Assim, para qualquer partição $P = \{I_k\}$ de $[0,1]$,

$$m_k = 0 \qquad \text{e} \qquad M_k = 1$$

em cada subintervalo I_k. Logo,

$$L(f;P) = 0, \qquad U(f;P) = 1,$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}(f) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}(f) = 1.$$

Consequentemente, f não é Riemann-integrável.

Exercício 34 (F)

Mostrar que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é Riemann-integrável em $[0,1]$ e calcular a sua integral.

Teorema 4.10 (Critério de integrabilidade de Cauchy)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é Riemann-integrável se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição R de $[a,b]$ tal que*

$$U(f;R) - L(f;R) \leq \varepsilon.$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que tal partição exista para todo $\varepsilon > 0$. Então

$$0 \leq \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) \leq U(f;R) - L(f;R) \leq \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. Reciprocamente, suponhamos $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. Pela definição de supremo e de ínfimo, existem partições P e Q tais que

$$U(f;P) \leq \mathcal{U}(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad L(f;Q) \geq \mathcal{L}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja R um refinamento comum. Então

$$U(f;R) - L(f;R) \leq U(f;P) - L(f;Q) \leq \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) + \varepsilon = \varepsilon.$$

□

Nota 4.11. O critério de Cauchy, juntamente com a noção de oscilação, permitirá estudar funções com descontinuidades.

Definição 4.12 (Oscilação)**.** Seja $A \subset I$. Definamos a oscilação de f em A por

$$\omega_f[A] = \sup_A f - \inf_A f.$$

A oscilação pontual é definida por

$$\omega_f(x) = \inf \{\omega_f[V] : V \text{ é uma vizinhança de } x\}.$$

Nota histórica

A noção de oscilação desempenha um papel central na teoria da integração de Riemann. Foi introduzida de forma sistemática por Gaston Darboux (1842–1917), permitindo reformular a teoria da integrabilidade em termos das somas inferior e superior. A oscilação tornou-se posteriormente uma ferramenta fundamental na teoria da continuidade, na teoria da medida e na análise de funções de variação limitada.

Exercício 35 (M)

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Demonstrar que:

(i) $\omega_{|f|}[D] \leq \omega_f[D]$. (**Sugestão: utilizar a desigualdade triangular inversa.**)

(ii)

$$\omega_f(x) = \lim_{\substack{|A|\to 0 \\ x\in A\subset D}} \omega_f[A].$$

(iii) f **é contínua em** $x \in D$ **se e somente se**

$$\omega_f(x) = 0.$$

Seja $P \in \mathcal{P}([a,b])$ uma partição composta por intervalos I_k e J_l. Suponhamos, por enquanto, que f possui apenas um número finito de pontos de descontinuidade, que os intervalos I_k não contenham pontos de descontinuidade de f e que cada intervalo J_l contenha exatamente um ponto de descontinuidade. Seja

$$K = \bigcup_k I_k.$$

Como f é contínua em cada intervalo I_k, é contínua em K. Além disso, K é uma união finita de intervalos fechados, logo é compacto. Pelo teorema de Heine–Cantor, f é uniformemente contínua em K. Consequentemente, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|I_k| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \omega_f[I_k] < \eta.$$

Por outro lado, para qualquer intervalo J_l,

$$\omega_f[J_l] = \sup_{J_l} f - \inf_{J_l} f \leq 2\|f\|_\infty.$$

Logo,

$$U(f;P) - L(f;P) \leq \sum_k \omega_f[I_k]|I_k| + 2\|f\|_\infty \sum_l |J_l|. \qquad (\star)$$

Proposição 4.13 (Critério básico de integrabilidade)**.** *À luz do critério de Cauchy, para demonstrar que f é Riemann-integrável basta construir partições tais que:*

1. *a soma dos comprimentos dos intervalos J_l seja suficientemente pequena;*
2. *a oscilação de f seja suficientemente pequena em cada intervalo I_k.*

Mais precisamente, por $(\star)$, para todo $\varepsilon > 0$, é suficiente encontrar uma partição tal que

$$2\|f\|_\infty \sum_l |J_l| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_k \omega_f[I_k]|I_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lema 4.14. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é Riemann-integrável se e somente se existem partições P_n de $[a, b]$ tais que*

$$U(f; P_n) - L(f; P_n) \longrightarrow 0.$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} U(f; P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f; P_n) = \mathcal{I}(f).$$

Demonstração. Se f é integrável, a primeira afirmação decorre imediatamente do critério de Cauchy. Reciprocamente, suponhamos que

$$U(f; P_n) - L(f; P_n) \longrightarrow 0.$$

Então

$$0 \leq U(f; P_n) - \mathcal{U}(f) \leq U(f; P_n) - \mathcal{L}(f) \leq U(f; P_n) - L(f; P_n) \longrightarrow 0,$$

pelo que

$$U(f; P_n) \longrightarrow \mathcal{U}(f).$$

Como

$$L(f; P_n) = U(f; P_n) - \big(U(f; P_n) - L(f; P_n)\big),$$

segue que $L(f; P_n) \longrightarrow \mathcal{U}(f)$. Por outro lado,

$$L(f; P_n) \leq \mathcal{L}(f),$$

para todo n. Passando ao limite, obtemos $\mathcal{U}(f) \leq \mathcal{L}(f)$. Como sempre $\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$, concluímos que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f)$. Logo, f é Riemann-integrável e

$$\lim_{n\to\infty} U(f; P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f; P_n) = \mathcal{I}(f).$$

□

Definição 4.15 (Soma e integral de Riemann)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Seja

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

uma partição de $[a, b]$, e sejam escolhidos pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. A soma de Riemann associada é

$$R(f; P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Dizemos que f é integrável no sentido de Riemann, com integral $\mathcal{I}(f)$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$, vale

$$|R(f; P) - \mathcal{I}(f)| \leq \varepsilon.$$

Esta definição é equivalente à anterior, pois para toda partição P e toda escolha dos pontos x_i^* vale

$$L(f; P) \leq R(f; P) \leq U(f; P).$$

Assim, fazendo a malha da partição tender para zero, as somas de Riemann convergem para o mesmo valor se e somente se as somas inferior e superior convergem para esse valor.

Teorema 4.16 (Integrabilidade de uma função contínua)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é Riemann-integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f é limitada em $[a, b]$. Pelo teorema de Heine–Cantor, f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Tomando uma partição cuja malha seja menor que δ, temos, em cada subintervalo I,

$$\sup_I f - \inf_I f < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Logo,

$$U(f; P) - L(f; P) = \sum_I (\sup_I f - \inf_I f)\,|I| < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_I |I| = \varepsilon.$$

Pelo critério de Cauchy, f é integrável. □

Teorema 4.17 (Integrabilidade de uma função monótona)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Então f é Riemann-integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Suponhamos f crescente. Consideremos a partição uniforme

$$x_i = a + i\frac{b - a}{n}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Em cada subintervalo,

$$M_i = f(x_i), \qquad m_i = f(x_{i-1}).$$

Assim,

$$U(f; P_n) - L(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b - a}{n}.$$

A soma é telescópica, logo

$$U(f; P_n) - L(f; P_n) = \frac{b - a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \longrightarrow 0, \qquad (n \to \infty).$$

Pelo critério de Cauchy, f é integrável. □

Nota histórica

A integrabilidade das funções monótonas foi um dos primeiros exemplos não triviais estudados por Riemann. Este resultado mostra que uma função pode possuir infinitos pontos de descontinuidade e permanecer Riemann-integrável. A caracterização completa dos conjuntos de descontinuidade admissíveis seria estabelecida por Henri Lebesgue em 1902.

O resultado anterior mostra que uma função monótona pode ter infinitos (mesmo numeráveis) pontos de descontinuidade e ainda assim ser Riemann-integrável.

Exemplo 4.18 (Função crescente com descontinuidades numeráveis)**.** Seja $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos números racionais em $[0,1)$, e seja (a_k) uma sucessão de números reais estritamente positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Definamos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k \in Q(x)} a_k, \qquad Q(x) = \{k \in \mathbb{N} : q_k \in [0,x)\}.$$

Além disso, definamos $f(0) = 0$. Para $x = 1$, a soma inclui todos os termos, logo $f(1) = 1$. Para $0 < x < 1$, o conjunto $Q(x)$ é infinito, pois os números racionais são densos em $[0,x)$. A função f é crescente, uma vez que o conjunto $Q(x)$ aumenta com x. Pelo teorema anterior, f é Riemann-integrável em $[0,1]$.

Apesar de integrável, f possui uma infinidade numerável de descontinuidades de salto, uma em cada número racional de $[0,1)$. Fora desses pontos, a função é contínua. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Exercício 36 (D)

Demonstrar que f é contínua em todo ponto irracional de $[0,1]$.

Lema 4.19 (Funções que diferem num conjunto finito)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas tais que $f(x) \neq g(x)$ apenas num conjunto finito de pontos de $[a,b]$. Então f é Riemann-integrável se e somente se g é Riemann-integrável e, nesse caso,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demonstração. Basta provar o resultado quando f e g diferem num único ponto $x_0 \in [a,b]$; o caso geral segue por indução finita.

Seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos uma partição $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(f;P) \leq \mathcal{U}(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $M > 0$ tal que

$$|f(x)|, |g(x)| \leq M, \qquad x \in [a,b].$$

Se $M = 0$, então $f = g \equiv 0$ e não há nada a demonstrar. Refinamos P obtendo uma nova partição Q de modo que exista um único subintervalo I contendo x_0 e tal que $|I| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. Fora de I, as funções f e g coincidem; logo, as respetivas contribuições para as somas superiores são iguais. Além disso,

$$\left|\sup_I f - \sup_I g\right| \leq 2M.$$

Daí,

$$|U(f;Q) - U(g;Q)| \leq 2M|I| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como Q é um refinamento de P,

$$U(f;Q) \leq U(f;P).$$

Assim,

$$\mathcal{U}(g) \leq U(g;Q) \leq U(f;Q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f;P) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathcal{U}(f) + \varepsilon.$$

Invertendo os papéis de f e g, obtemos igualmente $\mathcal{U}(f) \leq \mathcal{U}(g)$, logo $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$. De modo inteiramente análogo, $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. Concluímos que f é Riemann-integrável se e somente se g é Riemann-integrável. Além disso, como

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g),$$

as respetivas integrais coincidem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Nota 4.20. A hipótese de que o conjunto dos pontos de não coincidência é finito não pode, em geral, ser substituída pela hipótese de que esse conjunto é infinito. A função de Dirichlet fornece um contraexemplo.

Exemplo 4.21 (Função de Dirichlet)**.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

não é Riemann-integrável. Com efeito, todo subintervalo não degenerado de $[0,1]$ contém números racionais e irracionais. Assim, para toda partição P,

$$L(f;P) = 0, \qquad U(f;P) = 1,$$

pelo que o critério de Cauchy não pode ser satisfeito.

4.2 Extensão do intervalo de integração

Lema 4.22 (Princípio de extensão)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada tal que $f_{|[a,r]}$ é Riemann-integrável para todo $r < b$. Então f é Riemann-integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b} \int_a^r f(x)\,dx.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos $r < b$ tal que $2M(b-r) < \frac{\varepsilon}{2}$,, onde $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Como f é Riemann-integrável em $[a,r]$, existe uma partição P de $[a,r]$ tal que

$$U(f;P) - L(f;P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $Q = P \cup \{b\}$, a partição de $[a, b]$ obtida acrescentando o ponto b à partição P. Então

$$U(f; Q) - L(f; Q) \leq U(f; P) - L(f; P) + (\sup_{[r,b]} f - \inf_{[r,b]} f)(b - r).$$

Como $|f| \leq M$,

$$\sup_{[r,b]} f - \inf_{[r,b]} f \leq 2M,$$

logo

$$U(f; Q) - L(f; Q) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M(b - r) < \varepsilon.$$

Pelo critério de Cauchy, f é Riemann-integrável em $[a, b]$. Além disso,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^r f(x)\,dx \right| = \left| \int_r^b f(x)\,dx \right| \leq M(b - r),$$

pelo que

$$\int_a^r f(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx,$$

quando $r \to b$. □

Nota 4.23. De modo inteiramente análogo, se f é Riemann-integrável em $[r, b]$ para todo $r > a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 4.24. A função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

é Riemann-integrável em $[0, 1]$. De facto, é contínua em $[r, 1]$ para todo $r > 0$, logo é Riemann-integrável nesses intervalos. Além disso, é limitada em $[0, 1]$. O princípio de extensão garante que f é Riemann-integrável em $[0, 1]$.

Exemplo 4.25 (Contraexemplo)**.** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

não é Riemann-integrável em $[0, 1]$, embora seja Riemann-integrável em $[r, 1]$ para todo $r > 0$. De facto, $\sup_{(0,1]} |f| = +\infty$, pelo que f não é limitada numa vizinhança de 0. Assim, o princípio de extensão não se aplica.

Teorema 4.26. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua em todo o intervalo $[a, b]$, exceto num número finito de pontos. Então f é Riemann-integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Procedemos por indução sobre o número de pontos de descontinuidade. Se f possui apenas um ponto de descontinuidade, podemos supor, sem perda de generalidade, que esse ponto é b. Então f é contínua em $[a, r]$ para todo $r < b$ e, pelo teorema da integrabilidade das funções contínuas, é Riemann-integrável nesses intervalos. O princípio de extensão permite concluir que f é Riemann-integrável em $[a, b]$. Suponhamos agora o resultado válido para funções com, no máximo, $n - 1$ pontos de descontinuidade, e seja f uma função com n pontos de descontinuidade. Escolha-se um ponto de descontinuidade $c \in (a, b)$. Então as restrições de f aos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$ possuem, cada uma, no máximo $n - 1$ pontos de descontinuidade. Pela hipótese de indução, ambas são Riemann-integráveis. Como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

conclui-se que f é Riemann-integrável em $[a, b]$. □

Exemplo 4.27. A função

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right), & 0 < x < 2\pi,\ x \neq \pi, \\ 0, & x = 0, \pi, 2\pi, \end{cases}$$

é limitada em $[0, 2\pi]$ e possui apenas um número finito de pontos de descontinuidade. Pelo teorema anterior, é Riemann-integrável em $[0, 2\pi]$.

Exemplo 4.28. Considere a função sinal

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right), & 0 < x \leq \dfrac{1}{\pi},\ x \neq \dfrac{1}{n\pi}, \\ 0, & x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A função é limitada em $\left[0, \dfrac{1}{\pi}\right]$ e, para todo $r > 0$, possui apenas um número finito de pontos de descontinuidade em $\left[r, \dfrac{1}{\pi}\right]$. Assim, é Riemann-integrável em cada um desses intervalos. Pelo princípio de extensão, f é Riemann-integrável em $\left[0, \dfrac{1}{\pi}\right]$.

4.3 Integral de Riemann imprópria

Nota histórica

A teoria de Riemann foi inicialmente desenvolvida para funções limitadas definidas em intervalos compactos. A necessidade de integrar funções em intervalos ilimitados ou com singularidades isoladas conduziu naturalmente à noção de integral imprópria de Riemann.

Definição 4.29 (Integral imprópria)**.** Seja I um dos intervalos

$$[a,+\infty), \qquad (-\infty,b], \qquad (a,b], \qquad [a,b).$$

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f é Riemann-integrável em todo o subintervalo compacto contido em I.
Diz-se que f é *Riemann-integrável em sentido impróprio* em I se existir o limite correspondente das integrais sobre esses subintervalos compactos.
Mais precisamente,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\,dx,$$

e

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,dx,$$

sempre que os respetivos limites existam.

Nota 4.30. Quando a função apresenta uma singularidade num ponto interior $c \in (a,b)$, define-se

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

desde que ambas as integrais impróprias existam.

Teorema 4.31 (Linearidade)**.** *Seja I um dos intervalos $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(a,b]$ ou $[a,b)$. Se $f,g : I \to \mathbb{R}$ são Riemann-integráveis em sentido impróprio e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g$ é igualmente Riemann-integrável em sentido impróprio e*

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

Demonstração. A linearidade é válida para a integral de Riemann em qualquer intervalo

compacto. Por exemplo, se $I = [a, +\infty)$, então

$$\begin{aligned}\int_I (\alpha f + \beta g) &= \lim_{r\to+\infty} \int_a^r (\alpha f + \beta g) = \lim_{r\to+\infty} \left(\alpha \int_a^r f + \beta \int_a^r g\right) \\ &= \alpha \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f + \beta \lim_{r\to+\infty} \int_a^r g = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.\end{aligned}$$

Os restantes casos demonstram-se de modo inteiramente análogo. □

Exemplo 4.32. Se $p > 1$, então

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é Riemann-integrável em sentido impróprio em $[1, +\infty)$.

Exemplo 4.33. Se $0 < p < 1$, então

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}.$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é Riemann-integrável em sentido impróprio em $(0, 1]$.

Exemplo 4.34 (Contraexemplo)**.** A função $f(x) = \frac{1}{x}$ não é Riemann-integrável em sentido impróprio em $(0, 1]$, pois

$$\int_r^1 \frac{dx}{x} = -\log r \longrightarrow +\infty,$$

quando $r \to 0^+$.

Nota 4.35. A teoria de Riemann permite integrar uma vasta classe de funções. No entanto, a caracterização exata das funções Riemann-integráveis foi obtida por Henri Lebesgue, que demonstrou que uma função limitada é Riemann-integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula. Este resultado estabelece a ligação entre a teoria da integral de Riemann e a teoria da medida, constituindo uma das primeiras aplicações fundamentais da integração de Lebesgue.

4.4 Critério de Lebesgue

Até agora obtivemos diversos critérios suficientes para a integrabilidade de Riemann: continuidade, monotonia e continuidade por partes. O resultado seguinte fornece uma caracterização completa das funções Riemann-integráveis em termos do conjunto dos seus pontos de descontinuidade.

Definição 4.36 (Conjunto de medida zero)**.** Um conjunto $N \subset \mathbb{R}$ diz-se *de medida zero* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma família numerável de intervalos abertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Nota 4.37. Todo conjunto finito tem medida zero. Mais geralmente, todo conjunto enumerável tem medida zero.

Lema 4.38 (Propriedades básicas dos conjuntos de medida zero)**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$.*

1. *Todo conjunto numerável tem medida zero.*
2. *Se $A \subset B$ e B tem medida zero, então A também tem medida zero.*
3. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de conjuntos de medida zero, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ também tem medida zero.*

Demonstração. Os dois primeiros pontos são imediatos.

Para o terceiro, seja $\varepsilon > 0$. Para cada n, como A_n tem medida zero, existe uma cobertura por intervalos abertos $(I_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Então,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k},$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida zero. □

Exercício 37 (F)

Mostre que todo subconjunto de um conjunto de medida zero tem igualmente medida zero.

Definição 4.39 (Conjunto dos pontos de descontinuidade)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Define-se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f por

$$D(f) = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) > 0\},$$

onde $\omega_f(x)$ representa a oscilação de f no ponto x.

Teorema 4.40 (Critério de Lebesgue)**.** *Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade $D(f)$ tem medida zero.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que f é Riemann-integrável. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$E_m = \left\{ x \in [a,b] : \omega_f(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Pelo critério de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$U(f;P) - L(f;P) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Os subintervalos de P que contêm pontos de E_m têm oscilação pelo menos igual a $1/m$. Daí, a soma dos seus comprimentos é inferior a ε, mostrando que E_m tem medida zero. Como

$$D(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

o conjunto $D(f)$ tem medida zero. Reciprocamente, suponhamos que $D(f)$ tem medida zero. Seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos uma cobertura aberta de $D(f)$ por intervalos cuja soma dos comprimentos seja suficientemente pequena para que a sua contribuição para

$$U(f;P) - L(f;P)$$

seja inferior a $\varepsilon/2$. Como $D(f)$ é compacto, podemos supor essa cobertura finita. No complementar dessa união, a função é contínua sobre um compacto; pelo teorema de Heine–Cantor, é uniformemente contínua. Escolhendo uma partição suficientemente fina, a contribuição dos restantes subintervalos é igualmente inferior a $\varepsilon/2$. Assim,

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon.$$

Pelo critério de Cauchy, f é Riemann-integrável. □

Corolário 4.41. *São Riemann-integráveis em intervalos compactos:*

1. *as funções contínuas;*
2. *as funções monótonas;*
3. *as funções contínuas por partes;*
4. *as funções cujos pontos de descontinuidade são finitos;*
5. *as funções cujos pontos de descontinuidade são enumeráveis;*
6. *mais geralmente, as funções cujos pontos de descontinuidade têm medida zero.*

Demonstração. As funções contínuas são Riemann-integráveis pelo teorema de Heine–Cantor. As funções monótonas possuem, no máximo, um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade. As funções contínuas por partes têm apenas um número finito de pontos de descontinuidade. Os três últimos casos decorrem imediatamente do Critério de Lebesgue, uma vez que conjuntos finitos e conjuntos enumeráveis têm medida zero. □

Nota histórica

O critério de Lebesgue foi estabelecido por Henri Lebesgue em 1902 e constitui um dos resultados fundamentais da teoria da integração de Riemann. Mostra que o único obstáculo à integrabilidade é a existência de um conjunto "demasiado grande" de pontos de descontinuidade. Este resultado serviu igualmente de motivação para

o desenvolvimento da integral de Lebesgue, que permite integrar funções muito mais gerais.

Nota bibliográfica

O critério de Lebesgue pode ser encontrado em praticamente todos os textos clássicos de Análise Real. A demonstração apresentada nesta obra baseia-se apenas no critério de Cauchy, na noção de oscilação e na continuidade uniforme, evitando recorrer à teoria da medida de Lebesgue.

4.5 Teorema fundamental do cálculo

Teorema 4.42 (Teorema fundamental do cálculo)**.** *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Suponhamos que $F' = f$ em (a,b) e que f é Riemann-integrável em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Seja

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

uma partição de $[a,b]$. Pelo teorema do valor médio, para cada $k = 1, \ldots, n$, existe

$$x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$$

tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Somando sobre k, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Como

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \le f(x_k^*) \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} f,$$

segue-se que

$$L(f;P) \le F(b) - F(a) \le U(f;P).$$

Esta desigualdade é válida para toda a partição P de $[a,b]$. Tomando o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores, obtemos

$$\mathcal{L}(f) \le F(b) - F(a) \le \mathcal{U}(f).$$

Como f é Riemann-integrável,

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Logo,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Nota 4.43. A função $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongada por continuidade em $x = 0$ mediante a definição $\frac{\sin 0}{0} := 1$, é Riemann-integrável em todo o intervalo compacto $[0, A]$. Além disso, a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge, mas

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

diverge. Dizemos, por isso, que a primeira integral converge condicionalmente, mas não absolutamente.

Exercício 38 (M)

Mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sugestão: introduzir um parâmetro e considerar

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad t > 0,$$

derivando depois em ordem a t.

Exercício 39 (F)

Mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

diverge.

4.6 Integral de Riemann em $\mathbb{R}^d$

Nesta secção estendemos a construção da integral de Riemann a funções de várias variáveis. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um paralelipípedo compacto e $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Uma partição $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ é constituída por um número finito de paralelipípedos

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k,$$

de interiores disjuntos.

Definição 4.44 (Somas de Darboux)**.** Para cada elemento Ω_k da partição P, definimos

$$m_k = \inf_{x\in\Omega_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x\in\Omega_k} f(x).$$

As somas inferior e superior de Darboux são

$$L(f;P) = \sum_{k=1}^{N} m_k|\Omega_k|, \qquad U(f;P) = \sum_{k=1}^{N} M_k|\Omega_k|.$$

Definição 4.45 (Integrais inferior e superior)**.** Definimos

$$\underline{I}(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}(\Omega)} L(f;P), \qquad \overline{I}(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}(\Omega)} U(f;P).$$

Teorema 4.46. *Toda função $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ é Riemann-integrável.*

Definição 4.47 (Integral de Riemann)**.** Para $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, define-se

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

4.6.1 Propriedades fundamentais

Proposição 4.48. *A integral de Riemann satisfaz as seguintes propriedades.*

(i) ***Linearidade.***
Para todos $f, g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_\Omega f\,dx + \beta \int_\Omega g\,dx.$$

(ii) ***Monotonicidade.***
Se $f, g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ e $f \le g$ em Ω, então

$$\int_\Omega f\,dx \le \int_\Omega g\,dx.$$

(iii) ***Positividade.***
Se $f \ge 0$ em Ω, então

$$\int_\Omega f\,dx \ge 0.$$

(iv) ***Continuidade monótona.***
Se $(u_n)_{n\ge1} \subset \mathcal{C}_c(\Omega)$ satisfaz

$$u_n \searrow 0 \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,dx = 0.$$

(v) ***Desigualdade triangular.***
Para toda $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega f \, dx \right| \leq \int_\Omega |f| \, dx.$$

Demonstração. (i) A linearidade resulta diretamente da definição através das somas de Darboux.

(ii) A monotonicidade decorre do facto de $f \leq g$ implicar

$$L(f;P) \leq L(g;P) \quad \text{e} \quad U(f;P) \leq U(g;P)$$

para toda a partição P.

(iii) É um caso particular da monotonicidade.

(iv) Como $u_n \searrow 0$ uniformemente, tem-se $\|u_n\|_\infty \longrightarrow 0$. Logo,

$$0 \leq \int_\Omega u_n \, dx \leq |\Omega| \, \|u_n\|_\infty,$$

pelo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, dx = 0.$$

(v) Finalmente,

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

e aplicando a monotonicidade obtemos

$$-\int_\Omega |f| \, dx \leq \int_\Omega f \, dx \leq \int_\Omega |f| \, dx,$$

o que prova a desigualdade triangular. □

Nota 4.49 (Aditividade). Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ disjuntos tais que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então,

$$\int_\Omega f \, dx = \int_{\Omega_1} f \, dx + \int_{\Omega_2} f \, dx.$$

Mais geralmente, a propriedade estende-se a qualquer decomposição finita do domínio.

Nota 4.50. As propriedades de linearidade, positividade e continuidade monótona caracterizam as propriedades essenciais da integral de Riemann sobre $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Estas propriedades servirão de ponto de partida para a construção abstrata da integral de Daniell, apresentada no capítulo seguinte.

4.7 Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini permite calcular integrais múltiplas através de integrais iteradas.

Teorema 4.51 (Teorema de Fubini)**.** *Seja*

$$R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

e seja $f : R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então,*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Demonstração. Como f é contínua em R, é uniformemente contínua. As somas de Darboux bidimensionais podem ser escritas como somas iteradas relativamente às partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$. Fazendo tender o diâmetro das partições para zero obtém-se a igualdade entre a integral dupla e as integrais iteradas. □

Exemplo 4.52. Calcule

$$\iint_{[0,1]^2} (x + y)\, dx\, dy.$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_{[0,1]^2} (x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Nota histórica

O teorema de Fubini, demonstrado por Guido Fubini em 1907, constitui um dos resultados fundamentais da integração em várias variáveis. A sua versão mais geral será obtida para a integral de Lebesgue.

Nota bibliográfica

A teoria da integração de Riemann foi desenvolvida por Bernhard Riemann na sua célebre memória de habilitação de 1854, publicada postumamente em 1868. A extensão da integral a várias variáveis e a formulação moderna do Teorema de Fubini foram estabelecidas no início do século XX, em particular nos trabalhos de Guido Fubini. A apresentação adotada neste capítulo segue a abordagem clássica através das somas de Darboux, privilegiando uma construção elementar da integral e as propriedades fundamentais necessárias para a teoria abstrata da integração. Em particular, a propriedade de continuidade monótona será utilizada no capítulo seguinte como ponto de partida para a construção da integral de Daniell. Referências clássicas incluem Bourbaki [10], Rudin [68], Royden e Fitzpatrick [65], e Folland [31].

4.8 Séries absolutamente convergentes e rearranjos

4.8.1 Séries condicionalmente e absolutamente convergentes

A teoria da integral de Riemann baseia-se na aproximação da área por somas finitas. Intuitivamente, a ordem pela qual os retângulos são somados não deveria alterar o resultado

final. Contudo, a existência de séries apenas condicionalmente convergentes mostra que este princípio deixa de ser válido na ausência de convergência absoluta. Com efeito, o célebre teorema de Riemann afirma que uma série condicionalmente convergente pode ser rearranjada de modo a convergir para qualquer número real, ou mesmo a divergir. Este fenómeno explica por que razão a convergência absoluta desempenha um papel fundamental na teoria moderna da integração e das medidas.

Definição 4.53. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **condicionalmente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Definição 4.54. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Proposição 4.55. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então, para quaisquer inteiros $m > n$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ satisfaz o critério de Cauchy, o segundo membro tende para zero quando $n, m \to \infty$. Pelo critério de Cauchy, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Exercício 40 (M)

Demonstrar que o rearranjo dos termos de uma série absolutamente convergente não altera a soma.

4.8.2 Séries absolutamente convergentes e rearranjos

O resultado seguinte mostra que a convergência absoluta é precisamente a condição que garante que a soma de uma série é independente da ordem dos seus termos.

Teorema 4.56 (Rearranjo de séries absolutamente convergentes)**.** *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e seja $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma permutação dos índices. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Demonstração. Seja $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} |a_n| < \varepsilon$. Como σ é uma permutação, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, \ldots, N\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(M)\}$. Assim, para todo $m \geq M$,

$$S - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{n>N \\ n \notin \{\sigma(1),\ldots,\sigma(m)\}}} a_n,$$

e portanto

$$\left| S - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{n>N} |a_n| < \varepsilon.$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$.

□

Corolário 4.57. *Se uma série permanece invariante por qualquer rearranjo dos seus termos, então converge absolutamente.*

Demonstração. Se a série não convergisse absolutamente mas convergisse, seria condicionalmente convergente. Pelo Teorema de Riemann, demonstrado na subsecção seguinte, existiria um rearranjo cuja soma seria diferente da soma inicial, o que contradiz a hipótese. □

Exercício 41 (M)

Seja $\mu := \sum_{n\geq 1} c_n \delta_{x_n}$, onde δ_a denota a medida de Dirac no ponto a. Demonstrar que μ é uma medida de Radon finita se e somente se

$$\sum_{n\geq 1} |c_n| < \infty.$$

Nota histórica

A invariância da soma relativamente aos rearranjos foi estabelecida por Cauchy para séries absolutamente convergentes. O contraste com as séries condicionalmente convergentes só ficou completamente esclarecido com o trabalho de Bernhard Riemann, em 1854.

Nota bibliográfica

A convergência absoluta constitui uma das noções fundamentais da Análise. Além de garantir a invariância da soma relativamente aos rearranjos, ela permite justificar mudanças de ordem em séries e integrais, desempenhando um papel essencial na teoria das medidas e da integração.
Uma exposição clássica pode ser encontrada em *Divergent Series*, de G. H. Hardy, *Theory and Application of Infinite Series*, de K. Knopp, e *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, de T. J. I'A. Bromwich. Exposições modernas encontram-se em *Real and Complex Analysis*[68], de Walter Rudin, e em *Real Analysis*[31], de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick.

4.8.3 Teorema de Riemann sobre rearranjos

O resultado anterior mostra que a convergência absoluta garante a invariância da soma por rearranjos. O teorema seguinte estabelece que esta propriedade caracteriza precisamente a convergência absoluta.

Teorema 4.58 (Teorema de Riemann sobre rearranjos)**.** *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série condicionalmente convergente, então, para qualquer $S \in \mathbb{R}$, existe uma permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$. Além disso, existem rearranjos para os quais a série diverge para $+\infty$, diverge para $-\infty$ ou não possui limite.*

Nota 4.59. O Teorema de Riemann evidencia que a convergência absoluta é a condição necessária e suficiente para que a soma de uma série seja independente da ordem dos seus termos.

Para descrever a estrutura das séries condicionalmente convergentes, introduzimos as partes positiva e negativa dos seus termos.

Definição 4.60. Para cada $n \geq 1$, definem-se

$$p_n = \max\{a_n, 0\}, \qquad q_n = \max\{-a_n, 0\}.$$

Então

$$a_n = p_n - q_n, \qquad |a_n| = p_n + q_n,$$

com $p_n, q_n \geq 0$.

Proposição 4.61. *Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum a_n$ converge condicionalmente. Se uma das séries $\sum p_n$ ou $\sum q_n$ convergisse, então também a outra convergiria, pois

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n.$$

Daí resultaria a convergência de

$$\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n,$$

em contradição com a hipótese de convergência condicional. Logo,

$$\sum p_n = \sum q_n = +\infty.$$

Reciprocamente, se $\sum a_n$ converge e $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$, então

$$\sum |a_n| = \sum p_n + \sum q_n = +\infty,$$

pelo que a convergência não é absoluta. □

Exercício 42 (D)

Demonstrar o Teorema de Riemann sobre rearranjos.

Exercício 43 (F)

Encontrar um exemplo de série condicionalmente convergente e construir rearranjos cuja soma seja:

1. um número real arbitrário;
2. $+\infty$;
3. $-\infty$;
4. uma série sem limite.

Exercício 44 (M)

Demonstrar que, num espaço normado completo, toda série absolutamente convergente é convergente.

Exercício 45 (M)

Demonstrar que a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ é absolutamente convergente se e somente se, para toda a permutação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série reordenada converge e $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\pi(i)}$.

Exercício 46 (M)

Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de pontos dois a dois distintos e seja

$$\mu := \sum_{n\geq 1} c_n \delta_{x_n},$$

onde δ_a denota a medida de Dirac no ponto a. Demonstrar que μ define uma medida de Radon finita se e somente se

$$\sum_{n\geq 1} |c_n| < \infty.$$

Exercício 47 (F)

Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Demonstrar que a sucessão (a_n) converge em $\mathbb{R}$.

Nota histórica

Bernhard Riemann demonstrou este resultado em 1854, revelando uma diferença profunda entre convergência absoluta e convergência condicional. O teorema constituiu um passo decisivo no desenvolvimento da Análise moderna e influenciou profundamente a teoria da integração.

Nota bibliográfica

O teorema de Riemann é um dos resultados mais marcantes da teoria das séries infinitas. A demonstração original pode ser encontrada nas obras de Riemann, enquanto exposições clássicas aparecem em *Divergent Series*, de G. H. Hardy, e em *Theory and Application of Infinite Series*, de K. Knopp. Apresentações modernas encontram-se em *Real and Complex Analysis*[68], de Walter Rudin, e em *Real Analysis*[31], de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick.

4.9 Variação total de funções

Definição 4.62 (Variação total)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. A **variação total** de f em $[a, b]$ é definida por

$$V_a^b(f) := \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

do intervalo $[a, b]$.

Definição 4.63. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se de **variação limitada** em $[a, b]$ se

$$V_a^b(f) < \infty.$$

O conjunto destas funções é habitualmente denotado por

$$BV([a, b]).$$

Exemplo 4.64.

1. Se f é monótona em $[a, b]$, então
$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$
2. Toda função Lipschitziana em $[a, b]$ é de variação limitada. Com efeito, se
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$
então, para toda a partição P,
$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = L(b - a),$$
e portanto $V_a^b(f) \leq L(b - a)$.
3. Para
$$f(x) = \sin x \qquad \text{em } [0, 2\pi],$$
tem-se $V_0^{2\pi}(f) = 4$. Com efeito, $\sin x$ cresce de 0 até 1, decresce de 1 até -1 e volta a crescer de -1 até 0.

Proposição 4.65. *Se $a < c < b$, então*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Demonstração. Sejam P_1 e P_2 partições de $[a, c]$ e $[c, b]$, respetivamente. A sua união é uma partição de $[a, b]$, pelo que

$$V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Reciprocamente, dada uma partição P de $[a,b]$, podemos acrescentar-lhe o ponto c. A soma correspondente de incrementos absolutos decompõe-se numa soma em $[a,c]$ e numa soma em $[c,b]$. Logo,

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

□

4.9.1 Decomposição de Jordan

Vamos demonstrar que toda função de variação limitada se escreve como diferença de duas funções crescentes.

Proposição 4.66 (Decomposição de Jordan)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada. Então existem funções crescentes $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f = F - G.$$

Demonstração. Definamos $F(x) := V_a^x(f), \qquad x \in [a,b]$. Pela aditividade da variação total, se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, então

$$F(x_2) - F(x_1) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geq |f(x_2) - f(x_1)|.$$

Em particular, $F(x_2) \geq F(x_1)$, pelo que F é crescente. Definamos agora $G := F - f$. Então $f = F - G$. Além disso, para $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, temos

$$\begin{aligned} G(x_2) - G(x_1) &= F(x_2) - F(x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \\ &\geq |f(x_2) - f(x_1)| - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, G é crescente. Assim, $f = F - G$ é a diferença de duas funções crescentes. □

Nota 4.67. A decomposição anterior não é única. Com efeito, se $f = F - G$ e H é uma função crescente, então $f = (F + H) - (G + H)$. Uma decomposição canónica pode ser obtida através das variações positiva e negativa.

Nota histórica

A noção de função de variação limitada e a sua caracterização como diferença de duas funções crescentes foram introduzidas por Camille Jordan no final do século XIX [42]. Este resultado, hoje conhecido como *decomposição de Jordan*, desempenhou posteriormente um papel fundamental na teoria do integral de Riemann–Stieltjes e na decomposição das medidas com sinal.

Nota bibliográfica

A teoria das funções de variação limitada está intimamente relacionada com o integral de Riemann–Stieltjes, as medidas de Lebesgue–Stieltjes e a decomposição de medidas com sinal. Entre as exposições clássicas encontram-se E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable* [39], e I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable* [60]. Para abordagens modernas, veja-se Walter Rudin, *Real and Complex*

Analysis [68], e H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis* [65].

Parte II

A Construção Funcional da Integral de Lebesgue

Nesta segunda parte desenvolvemos a teoria da integração a partir da abordagem de Daniell. Ao contrário da construção clássica de Lebesgue, que parte da teoria da medida, a construção de Daniell toma como ponto de partida um funcional linear positivo definido sobre uma classe de funções elementares e mostra como este se prolonga naturalmente a uma classe muito mais vasta de funções integráveis.

Esta perspetiva evidencia desde o início a estreita ligação entre a integração, a Análise Funcional e a teoria dos espaços normados. Os espaços L^p, a dualidade e as diferentes formas de convergência surgem de forma natural como consequência da estrutura funcional da integral.

Embora historicamente anterior, a construção de Lebesgue será apresentada apenas na parte seguinte. Esta opção pedagógica permite separar claramente as duas grandes abordagens da teoria da integração e mostrar que, apesar de partirem de pontos de vista muito diferentes, ambas conduzem à mesma noção de integral.

O objetivo desta parte é, assim, desenvolver os principais resultados da teoria da integração num enquadramento funcional e preparar o estudo da construção clássica de Lebesgue que será apresentada na terceira parte.

Capítulo 5

A construção de Daniell da integral de Lebesgue

Em 1918, Percy John Daniell introduziu uma construção abstrata da integral de Lebesgue baseada na extensão de uma integral elementar. Ao contrário da abordagem clássica de Lebesgue, que parte da teoria da medida, a medida surge aqui naturalmente como consequência da própria construção da integral.

Neste capítulo apresentamos esta abordagem no contexto da integral de Riemann sobre $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. A ideia consiste em identificar as propriedades fundamentais da integral de Riemann e utilizá-las como axiomas para construir uma teoria de integração mais geral.

Percy John Daniell (1889–1946)

> *Nota* 5.1. A construção apresentada neste capítulo não utiliza argumentos topológicos. A abordagem clássica de Lebesgue, baseada na teoria da medida e na construção de Carathéodory, será estudada mais adiante.

5.1 A integral de Riemann como ponto de partida

A construção que segue utiliza apenas algumas propriedades fundamentais da integral de Riemann sobre $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Estas propriedades servirão de ponto de partida para a construção da integral de Lebesgue.

Lema 5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O espaço $\mathcal{C}_c(\Omega)$ e a integral de Riemann satisfazem:*

1. *Se $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, então $|f| \in \mathcal{C}_c(\Omega)$;*
2. ***(Linearidade)** Para todos $f, g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_\Omega f\, dx + \beta \int_\Omega g\, dx;$$
3. ***(Positividade)** Se $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ e $f \geq 0$ em Ω, então*
$$\int_\Omega f\, dx \geq 0;$$
4. ***(Continuidade monótona decrescente)** Se $(u_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}_c(\Omega)$ é tal que*
$$u_n \searrow 0 \quad \text{em } \Omega,$$
então
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\, dx = 0.$$

Demonstração. As propriedades (1)–(3) são imediatas. Para (4), por definição do suporte compacto, existe $R > 0$ tal que

$$\operatorname{spt}(u_0) \subset K := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty \leq R\}.$$

Pelo teorema de Dini, (u_n) converge uniformemente para 0 em K. Logo,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n\, dx \leq (2R)^N \max_{x\in K} u_n(x) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

□

Nota 5.3. A partir deste ponto, a construção concreta da integral de Riemann deixa de desempenhar qualquer papel. Apenas as propriedades do lema anterior serão utilizadas na construção da integral de Lebesgue.

5.2 Integral elementar

Definição 5.4 (Integral elementar)**.** As propriedades (1)–(4) definem o conceito de *integral elementar*.

A construção de Daniell consiste em definir a integral de Lebesgue como a menor extensão da integral de Riemann que satisfaz a seguinte propriedade adicional.

Definição 5.5 (Propriedade (5): Continuidade monótona)**.** Se (u_n) é uma sucessão crescente de funções integráveis tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} u_n\, dx < \infty,$$

então a função

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x),$$

que pode assumir o valor $+\infty$, é integrável e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n\,dx.$$

Nota 5.6. A Propriedade (5) pressupõe a existência de uma noção de integral.
As funções contínuas com suporte compacto, munidas da integral de Riemann, fornecem precisamente uma integral elementar.

5.3 Classes de funções integráveis

A Propriedade (5) sugere naturalmente como alargar a classe das funções integráveis. Procuramos agora construir a menor classe que contém $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ e para a qual esta propriedade continua válida.

Definição 5.7 (Classe $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx)$)**.** Dizemos que uma função u pertence a $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx)$ se existe uma sucessão crescente $(u_n) \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \uparrow u \qquad \text{e} \qquad \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} u_n\,dx < \infty.$$

Define-se então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n\,dx.$$

Mostraremos mais adiante que esta definição depende apenas da função u.

Nota 5.8. Sejam $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx)$. A diferença $f - g$ está bem definida, exceto eventualmente nos pontos em que

$$f(x) = g(x) = +\infty.$$

Esta observação motiva a introdução da noção de conjunto desprezável.

Definição 5.9 (Conjunto desprezável)**.** Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ diz-se *desprezável* se existe $h \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx)$ tal que

$$h(x) = +\infty, \qquad \forall x \in S.$$

Definição 5.10 (Classe $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, dx)$)**.** Dizemos que $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, dx)$ se existem $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx)$ tais que

$$u = f - g \qquad \text{exceto num conjunto desprezável.}$$

Define-se então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g\,dx.$$

Mostraremos mais adiante que esta definição é independente da decomposição

$$u = f - g.$$

Nota 5.11. Obtivemos assim a cadeia de inclusões

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N, dx) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, dx),$$

que constitui a primeira etapa da construção da integral de Lebesgue segundo Daniell.

5.4 Integral elementar no sentido de Daniell

Em 1918, Percy John Daniell introduziu uma construção abstrata da integral baseada apenas nas propriedades fundamentais de uma integral elementar. O objetivo desta secção é formular esse quadro axiomático.

Definição 5.12 (Integral elementar $\mathcal{L}(\Omega, \mu)$)**.** Seja Ω um conjunto.
Uma *integral elementar* é constituída por um espaço vetorial $\mathcal{L}(\Omega)$ de funções reais definidas em Ω e por um funcional linear

$$\mu : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u \longmapsto \int_\Omega u\,d\mu,$$

que satisfaz as propriedades seguintes:

1. Se $u \in \mathcal{L}(\Omega)$, então $|u| \in \mathcal{L}(\Omega)$;
2. **(Linearidade)** Para todos $u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v)\,d\mu = \alpha \int_\Omega u\,d\mu + \beta \int_\Omega v\,d\mu;$$
3. **(Positividade)** Se $u \geq 0$, então
$$\int_\Omega u\,d\mu \geq 0;$$
4. **(Continuidade monótona decrescente)** Se $(u_n) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ e
$$u_n \downarrow 0,$$
então
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,d\mu = 0.$$

Nota 5.13. As funções contínuas com suporte compacto, munidas da integral de Riemann, constituem um exemplo de integral elementar. Neste caso,

$$\mathcal{L}(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega), \qquad \mu = dx.$$

Na teoria abstrata de Daniell, porém, não se impõe qualquer hipótese de continuidade sobre as funções pertencentes a $\mathcal{L}(\Omega)$.

Nota 5.14. Pela propriedade (3), se $u = 0$ em $A \subset \Omega$, então

$$\int_A u\, d\mu = \int_\Omega u\, \chi_A\, d\mu = 0.$$

Lema 5.15. *Sejam $u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$. Então*

$$u^+,\ u^-,\ \max(u, v),\ \min(u, v) \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Além disso, se $u \leq v$, então

$$\int_\Omega u\, d\mu \leq \int_\Omega v\, d\mu.$$

Exercício 48 (F)

Demonstrar o lema anterior.

5.5 Sucessões fundamentais, classe $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ e conjuntos desprezáveis

A Propriedade (5) motiva a introdução de uma classe mais ampla de funções integráveis. O primeiro passo consiste em identificar as sucessões que servirão para construir esta extensão.

Definição 5.16 (Sucessão fundamental)**.** Uma *sucessão fundamental* é uma sucessão crescente $(u_n) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\, d\mu = \sup_n \int_\Omega u_n\, d\mu < \infty.$$

Definição 5.17 (Classe $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$)**.** Uma função

$$u : \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

pertence a $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ se existe uma sucessão fundamental $(u_n) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ tal que

$$u_n \uparrow u.$$

Definição 5.18 (Conjunto μ-desprezável)**.** Um subconjunto $S \subset \Omega$ diz-se *μ-desprezável* se existe uma sucessão fundamental (u_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = +\infty, \qquad \forall x \in S.$$

Diremos que uma propriedade é verdadeira *μ-em quase toda a parte* (*q.t.p.*) se o conjunto dos pontos onde ela falha é μ-desprezável.

Nota 5.19. Pode-se substituir uma sucessão fundamental (u_n) por (u_n^+), pois esta continua a ser uma sucessão fundamental e tende para $+\infty$ exatamente nos mesmos pontos.
Além disso, dado $\varepsilon > 0$, pode-se escolher a sucessão fundamental de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu < \varepsilon.$$

Com efeito, basta multiplicar (u_n) por uma constante positiva suficientemente pequena.

Lema 5.20. *Toda união numerável de conjuntos μ-desprezáveis é μ-desprezável.*

Demonstração. Seja (S_k) uma sucessão de conjuntos μ-desprezáveis. Para cada k, existe $v_k \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ tal que

$$x \in S_k \quad \Longrightarrow \quad v_k(x) = +\infty.$$

Substituindo v_k por v_k^+ e multiplicando por uma constante positiva, podemos supor que

$$\int_\Omega v_k \, d\mu \leq \frac{1}{2^k}.$$

Definamos

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Então (u_n) é crescente e

$$\int_\Omega u_n \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Logo, (u_n) é uma sucessão fundamental.

Além disso,

$$u_n \uparrow u \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu),$$

e

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu < \infty.$$

Finalmente, para todo

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k,$$

temos

$$u(x) = +\infty,$$

o que mostra que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

é μ-desprezável. □

5.6 Convergência monótona e relação de ordem em $\mathcal{L}(\Omega)$

Antes de definir a integral de Lebesgue em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$, é necessário estender a propriedade de continuidade monótona às sucessões que convergem para zero apenas μ-em quase toda a parte.

Lema 5.21 (Convergência monótona)**.** *Seja (u_n) uma sucessão decrescente de funções de $\mathcal{L}(\Omega)$ tal que*

$$u_n \geq 0 \qquad \text{em } \Omega,$$

e

$$u_n(x) \longrightarrow 0 \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu = 0.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$.

Pela hipótese e pela observação da secção anterior, existe uma sucessão fundamental (v_n) tal que

$$v_n \geq 0, \qquad \int_\Omega v_n \, d\mu \leq \varepsilon,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = +\infty$$

em todos os pontos onde

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) > 0.$$

Definamos

$$w_n := (u_n - v_n)^+.$$

Então

$$w_n \downarrow 0$$

pontualmente. Pela propriedade (4) da integral elementar,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \, d\mu = 0.$$

Além disso,

$$0 \leq \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \int_\Omega (w_n + v_n) \, d\mu = \int_\Omega w_n \, d\mu + \int_\Omega v_n \, d\mu.$$

Passando ao limite,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu = 0.$$

□

O lema anterior permite estabelecer a monotonicidade da integral ao longo de sucessões fundamentais.

Lema 5.22 (Comparação de sucessões fundamentais)**.** *Sejam (u_n) e (v_n) sucessões fundamentais tais que, μ-q.t.p.,*

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} v_n(x) =: v(x).$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu.$$

Demonstração. Fixe-se $k \in \mathbb{N}$ e defina-se

$$w_n := (u_k - v_n)^+.$$

Então (w_n) é uma sucessão decrescente de funções não negativas.

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = (u_k(x) - v(x))^+$$

μ-q.t.p., pelo que

$$(u_k - v)^+ \leq (u - v)^+ = 0.$$

Pelo lema anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \, d\mu = 0.$$

Como

$$u_k = (u_k - v_n)^+ - (u_k - v_n)^- + v_n,$$

segue-se que

$$\int_\Omega u_k \, d\mu \leq \int_\Omega (w_n + v_n) \, d\mu.$$

Passando ao limite em n,

$$\int_\Omega u_k \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu.$$

Tomando agora o supremo em k, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu.$$

□

5.7 Integral de Lebesgue em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$

Estamos agora em condições de definir a integral de Lebesgue para funções pertencentes a $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$.

Definição 5.23 (Integral de Lebesgue)**.** Seja

$$u \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu).$$

Se (u_n) é uma sucessão fundamental tal que

$$u_n \uparrow u,$$

define-se

$$\int_\Omega u \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu.$$

Exercício 49 (F)

Demonstrar que

$$\mathcal{L}(\Omega) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu).$$

O lema de comparação das sucessões fundamentais permite mostrar que esta definição é independente da sucessão fundamental escolhida.

Proposição 5.24 (A integral de Lebesgue está bem definida)**.** *Seja*

$$u \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu).$$

Então o valor de

$$\int_\Omega u \, d\mu$$

depende apenas da função u.

Demonstração. Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões fundamentais tais que

$$u_n \uparrow u, \qquad v_n \uparrow u,$$

μ-q.t.p.

Aplicando o lema de comparação às duas sucessões obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu.$$

Invertendo os papéis de (u_n) e (v_n) obtém-se a desigualdade inversa, concluindo-se que os dois limites coincidem. □

Estabelecemos agora algumas propriedades básicas de $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$.

Lema 5.25. *Sejam $u, v \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$.*

1. *u^+, $\max(u, v)$ e $\min(u, v)$ pertencem a $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$;*
2. *Para todos $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$\alpha u + \beta v \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu),$$

e

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v)\, d\mu = \alpha \int_\Omega u\, d\mu + \beta \int_\Omega v\, d\mu;$$

3. *Se*

$$u \leq v \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

então

$$\int_\Omega u\, d\mu \leq \int_\Omega v\, d\mu.$$

Demonstração. A propriedade (3) é uma consequência imediata do lema de comparação das sucessões fundamentais.

As restantes propriedades deixam-se como exercício. □

Nota 5.26. Em geral,

$$u^- = (-u)^+$$

e

$$|u| = u^+ + u^-,$$

não pertencem necessariamente a $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$. Esta dificuldade motiva a introdução do espaço $\mathcal{L}^1(\Omega, d\mu)$.

5.8 Convergência monótona em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$

Mostremos agora que a Propriedade (5) continua válida em $\mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$.

Lema 5.27 (Convergência monótona)**.** *Seja $(u_k) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ uma sucessão crescente (em toda a parte ou μ-q.t.p.) tal que*

$$\sup_k \int_\Omega u_k\, d\mu < \infty.$$

Então existe uma função

$$u \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$$

tal que

$$u_k \uparrow u$$

(em toda a parte ou μ-q.t.p.) e

$$\int_\Omega u\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k\, d\mu.$$

Demonstração. Para cada k, seja $(u_{k,n}) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ uma sucessão fundamental tal que $u_{k,n} \uparrow u_k$. Definamos

$$v_n := \max\{u_{1,n}, \ldots, u_{n,n}\}.$$

Então (v_n) é crescente e satisfaz

$$v_n \leq \max(u_1, \ldots, u_n) = u_n.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega v_n \, d\mu \leq \int_\Omega u_n \, d\mu \leq c,$$

onde

$$c := \sup_k \int_\Omega u_k \, d\mu.$$

Logo, (v_n) é uma sucessão fundamental. Seja $u := \lim_{n\to\infty} v_n$. Então $u \in \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu)$ e $\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu$. Além disso, $u_{k,n} \leq v_n \leq u_n$. Passando ao limite em n, obtemos $u_k \leq u \qquad (k \in \mathbb{N})$, e também $u_n \leq u$. Logo, $u_k \uparrow u$. Finalmente,

$$\int_\Omega v_n \, d\mu \leq \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \int_\Omega u \, d\mu.$$

Passando ao limite,

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \leq \int_\Omega u \, d\mu,$$

pelo que

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu.$$

□

Nota bibliográfica

A apresentação das Secções 5.4–5.8 segue, em larga medida, a exposição de Michel Willem em *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*[77, 76], com adaptações de notação e de organização.

Capítulo 6

Espaço $\mathcal{L}^1$

Nota 6.1. Por definição, toda função de $\mathcal{L}^+(\Omega,\mu)$ é finita μ-q.t.p. Consequentemente, a diferença de duas funções de $\mathcal{L}^+(\Omega,\mu)$ está bem definida μ-q.t.p.
Sejam $f,g,v,w \in \mathcal{L}^+(\Omega,\mu)$ tais que

$$f-g=v-w \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Então

$$f+w=v+g \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

e, pela linearidade da integral em $\mathcal{L}^+$,

$$\int_\Omega f\,d\mu+\int_\Omega w\,d\mu=\int_\Omega (f+w)\,d\mu=\int_\Omega (v+g)\,d\mu=\int_\Omega v\,d\mu+\int_\Omega g\,d\mu.$$

Logo,

$$\int_\Omega f\,d\mu-\int_\Omega g\,d\mu=\int_\Omega v\,d\mu-\int_\Omega w\,d\mu.$$

Assim, a diferença das integrais depende apenas da função $f-g$.

Definição 6.2 (Espaço $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$)**.** Uma função real u, definida μ-q.t.p. em Ω, pertence a $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ se existem funções $f,g\in\mathcal{L}^+(\Omega,\mu)$ tais que

$$u=f-g \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

A integral de Lebesgue de u é definida por

$$\int_\Omega u\,d\mu := \int_\Omega f\,d\mu-\int_\Omega g\,d\mu.$$

Nota 6.3.
1. Pela observação anterior, a integral está bem definida, isto é, o seu valor não depende da decomposição $u=f-g$.
2. Toda função de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ é real μ-q.t.p.
3. Se $S\subset\Omega$ é um conjunto desprezável e $u\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, então podemos modificar os valores de u em S sem alterar a sua classe em $\mathcal{L}^1$.

Em particular, podemos supor que $u = 0$ em S e, pela Nota 5.14,

$$\int_S u \, d\mu = 0.$$

Proposição 6.4 (Propriedades da integral de Lebesgue)**.** *Sejam $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.*

1. *$|u| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$;*
2. *Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*
$$\alpha u + \beta v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$$
e
$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) \, d\mu = \alpha \int_\Omega u \, d\mu + \beta \int_\Omega v \, d\mu;$$
3. *Se*
$$u \geq 0 \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$
então
$$\int_\Omega u \, d\mu \geq 0.$$

Demonstração. Escrevendo $u = f - g$, com $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$, obtemos

$$|u| = \max(f, g) - \min(f, g).$$

Como $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$, segue que $|u| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. As propriedades (2) e (3) decorrem imediatamente da definição da integral e das propriedades correspondentes em $\mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$. □

Lema 6.5 (Lema técnico)**.** *Seja $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ e $\varepsilon > 0$. Então existem $v, w \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ tais que*

$$u = v - w \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

com $w \geq 0$ e

$$\int_\Omega w \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Demonstração. Escrevamos

$$u = f - g,$$

onde $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$. Seja $(g_n) \subset \mathcal{L}(\Omega, \mu)$ uma sucessão fundamental tal que $g_n \uparrow g$. Pela convergência monótona,

$$\int_\Omega g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega (g - g_n) \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Definindo

$$w := g - g_n, \qquad v := f - g_n,$$

obtemos $u = v - w$, com $w \geq 0$ e

$$\int_\Omega w \, d\mu \leq \varepsilon.$$

□

6.1 Teorema de Levi

A linearidade da integral foi estabelecida na secção anterior. O resultado seguinte mostra que a integral de Lebesgue é igualmente compatível com a passagem ao limite de sucessões crescentes. Este é um dos pilares da teoria e servirá de base para os resultados de convergência que se seguem.

Teorema 6.6 (Teorema da convergência monótona de Levi)**.** *Seja $(u_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ uma sucessão crescente μ-q.t.p. tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \, d\mu < \infty.$$

Então existe $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ tal que

$$u_n \uparrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

e

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu.$$

Demonstração. Substituindo u_n por $u_n - u_0$, podemos supor que $u_0 = 0$. Pelo lema técnico, para cada $k \geq 1$ existem $v_k, w_k \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ tais que

$$u_k - u_{k-1} = v_k - w_k \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

com

$$w_k \geq 0, \qquad \int_\Omega w_k \, d\mu \leq \frac{1}{2^k}.$$

Definamos

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} v_k, \qquad g_n := \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Então $f_n = g_n + u_n$. Além disso,

$$\int_\Omega g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega w_k \, d\mu \leq 1,$$

e, consequentemente,

$$\int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega (u_n + g_n) \, d\mu \leq \sup_n \int_\Omega u_n \, d\mu + 1.$$

As sucessões (f_n) e (g_n) são crescentes em $\mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$. Pelo teorema da convergência monótona em $\mathcal{L}^+$, existem $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ tais que

$$f_n \uparrow f, \qquad g_n \uparrow g,$$

e

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu,$$

$$\int_\Omega g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$

Finalmente, $f_n - g_n = u_n$, pelo que, passando ao limite,

$$f - g = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Definindo $u := f - g$, obtemos $u \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ e

$$\int_\Omega u\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu - \int_\Omega g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega f_n\,d\mu - \int_\Omega g_n\,d\mu\right).$$

Como

$$\int_\Omega f_n\,d\mu - \int_\Omega g_n\,d\mu = \int_\Omega u_n\,d\mu,$$

segue que

$$\int_\Omega u\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\,d\mu.$$

□

6.2 Lema de Fatou

O resultado seguinte é uma primeira consequência do Teorema de Levi. Embora forneça apenas uma desigualdade, constitui um instrumento fundamental no estudo da convergência de sucessões de funções integráveis.

Lema 6.7 (Lema de Fatou)**.** *Seja $(u_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ uma sucessão tal que*

(a)
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega u_n\,d\mu < \infty;$$

(b) *existe $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ tal que*
$$f \le u_n \qquad \mu\text{-q.t.p., para todo } n.$$

Então,

(i)
$$\liminf_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu);$$

(ii)
$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} u_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\,d\mu.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $m \ge k$, definamos

$$u_{k,m} = \min\{u_k,\ldots,u_m\}.$$

Então,

$$u_{k,m} \downarrow v_k := \inf_{n \geq k} u_n \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Além disso,

$$f \leq u_{k,m} \leq u_n, \qquad k \leq n \leq m,$$

pelo que

$$\sup_m \int_\Omega u_{k,m}\, d\mu \leq \sup_n \int_\Omega u_n\, d\mu < \infty.$$

Aplicando o Teorema de Levi à sucessão crescente $(-u_{k,m})_{m \geq k}$, obtemos $v_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ e

$$\int_\Omega v_k\, d\mu = \lim_{m \to \infty} \int_\Omega u_{k,m}\, d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int_\Omega u_n\, d\mu.$$

A sucessão (v_k) é crescente e satisfaz

$$v_k \uparrow \liminf_{n \to \infty} u_n \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Além disso,

$$\sup_k \int_\Omega v_k\, d\mu \leq \sup_n \int_\Omega u_n\, d\mu < \infty.$$

Uma nova aplicação do Teorema de Levi mostra que $\liminf_{n \to \infty} u_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ e

$$\int_\Omega \liminf_{n \to \infty} u_n\, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega v_k\, d\mu.$$

Como

$$\int_\Omega v_k\, d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int_\Omega u_n\, d\mu,$$

segue que

$$\int_\Omega \liminf_{n \to \infty} u_n\, d\mu \leq \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} \int_\Omega u_n\, d\mu = \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega u_n\, d\mu.$$

□

6.3 Teorema da convergência dominada

O Teorema da Convergência Dominada completa os principais resultados de convergência da integração de Lebesgue. Ao substituir a monotonicidade por uma hipótese de dominação integrável, torna-se um dos instrumentos mais importantes da análise.

Teorema 6.8 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ *uma sucessão tal que*

(a)

$$u_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.;}$$

(b) *existe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ *tal que*

$$|u_n| \leq g \qquad \mu\text{-q.t.p., para todo } n.$$

Então

$$u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$$

e

$$\int_\Omega u_n \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega u \, d\mu.$$

Demonstração. Como

$$-g \leq u_n \leq g \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

segue, passando ao limite, que

$$|u| \leq g \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Logo, $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Além disso,

$$2g - (u_n - u) \geq 0 \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Aplicando o Lema de Fatou à sucessão $(2g - (u_n - u))$, obtemos

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \big(2g - (u_n - u)\big) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \big(2g - (u_n - u)\big) \, d\mu.$$

Como

$$u_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

temos

$$\liminf_{n\to\infty} \big(2g - (u_n - u)\big) = 2g,$$

pelo que

$$2\int_\Omega g \, d\mu \leq 2\int_\Omega g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu \leq 0.$$

Aplicando o mesmo argumento à sucessão $(2g - (u - u_n))$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (u - u_n) \, d\mu \leq 0,$$

isto é,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu \geq 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu = 0,$$

ou, de forma equivalente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu = \int_\Omega u \, d\mu.$$

□

Exercício 50 (F)

Seja

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e defina

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(a) Determine o limite pontual f.
(b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Exercício 51 (F)

Seja $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, e defina $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(a) Determine o limite pontual f.
(b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

6.4 Teorema da comparação

O resultado seguinte permite reconhecer a integrabilidade de uma função limite a partir de uma estimativa uniforme sobre o próprio limite, mesmo quando a sucessão original não é dominada.

Teorema 6.9 (Teorema da comparação)**.** *Sejam* $(u_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que*

(a)

$$u_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-}q.t.p.;$$

(b)

$$|u| \le f \qquad \mu\text{-}q.t.p.$$

Então

$$u \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$v_n := \max\big\{\min\{u_n, f\}, -f\big\}.$$

Como $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ é estável por máximos e mínimos, temos $v_n \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$. Além disso,

$$|v_n| \le f \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

e, pela continuidade da aplicação

$$t \longmapsto \max\big\{\min\{t, f(x)\}, -f(x)\big\},$$

para quase todo $x \in \Omega$,

$$v_n(x) \longrightarrow \max\big\{\min\{u(x), f(x)\}, -f(x)\big\}.$$

Como

$$|u| \le f \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

o limite anterior é igual a u. Assim,

$$v_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

O Teorema da Convergência Dominada aplicado à sucessão (v_n) mostra então que $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. □

Nota 6.10. O teorema anterior difere do Teorema da Convergência Dominada: a função f domina apenas o limite u, e não necessariamente os termos u_n. Por essa razão, o resultado garante a integrabilidade de u, mas não a convergência das integrais.

Exemplo 6.11 (Contraexemplo)**.** Considere a sucessão

$$u_n(x) = n\,\chi_{(0,1/n)}(x), \qquad x \in (0,1).$$

Então $u_n \in \mathcal{L}^1(0,1)$ e

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n\,dx = 1 \qquad \text{para todo } n.$$

Por outro lado, para todo $x \in (0,1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin (0,1/n)$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $u_n(x) \longrightarrow 0$. Assim,

$$u_n \longrightarrow u := 0 \qquad \mu\text{-q.t.p. em } (0,1).$$

Além disso,

$$|u| = 0 \leq 1 \qquad \text{em } (0,1),$$

e a função constante 1 pertence a $\mathcal{L}^1(0,1)$. Contudo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 u(x)\,dx.$$

Logo, a hipótese

$$|u| \leq f, \qquad f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu),$$

garante que o limite u é integrável, mas não implica a convergência das integrais.

6.5 Funções mensuráveis

Até agora definimos a integral para funções pertencentes ao espaço $\mathcal{L}(\Omega)$. No entanto, esta classe não é estável por limites pontuais, o que motiva a introdução de uma família mais ampla de funções. As funções mensuráveis constituem precisamente a menor classe que contém $\mathcal{L}(\Omega)$ e que é estável pela convergência quase em toda a parte.

Definição 6.12 (Função mensurável)**.** Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida μ-quase em toda a parte, diz-se *mensurável* se existe uma sucessão $(u_n) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Denotaremos por

$$\mathcal{M}(\Omega, \mu)$$

o conjunto de todas as funções mensuráveis.

Proposição 6.13. *A classe $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ satisfaz as seguintes propriedades.*

(a) *Tem-se*

$$\mathcal{L}(\Omega) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

(b) *Se $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$, então*

$$|u| \in \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

(c) *Se $u, v \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então*

$$\alpha u + \beta v \in \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

(d) *Se $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ e existe $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ tal que*

$$|u| \leq f \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

então

$$u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu).$$

Demonstração. As inclusões em (a) decorrem diretamente das definições. A propriedade (b) segue do facto de a função $t \mapsto |t|$ ser contínua, pelo que

$$|u_n| \longrightarrow |u| \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Para provar (c), sejam (u_n) e (v_n) sucessões em $\mathcal{L}(\Omega)$ tais que

$$u_n \longrightarrow u, \qquad v_n \longrightarrow v \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Então

$$\alpha u_n + \beta v_n \longrightarrow \alpha u + \beta v \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

e como $\mathcal{L}(\Omega)$ é um espaço vetorial, conclui-se que $\alpha u + \beta v \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. Finalmente, a propriedade (d) é uma consequência imediata do Teorema da Comparação, uma vez que

$$|u| \leq f \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

com $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. □

Nota 6.14. Se $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ é não negativa mas não pertence a $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, adota-se a convenção

$$\int_\Omega u \, d\mu = +\infty.$$

Desta forma, a integral fica definida para toda a função mensurável não negativa, tomando valores em $[0, +\infty]$.

Teorema 6.15 (Estabilidade por convergência monótona)**.** *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ *uma sucessão crescente* μ*-quase em toda a parte tal que*

$$u_n \longrightarrow u \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

onde u *é finita* μ*-quase em toda a parte. Então*

$$u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

Demonstração. A demonstração é feita em três etapas.

1. O caso $(u_n) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$**.** Para cada k, existe uma sucessão $(u_{k,m}) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ tal que

$$u_{k,m} \uparrow u_k \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Definamos $v_n = \max\{u_{1,n}, \ldots, u_{n,n}\}$. Como $\mathcal{L}(\Omega)$ é estável pelo máximo de um número finito de funções, temos $v_n \in \mathcal{L}(\Omega)$. Além disso, (v_n) é crescente. Para $k \leq n$,

$$u_{k,n} \leq v_n,$$

enquanto, para todo $j \leq n$,

$$u_{j,n} \leq u_j \leq u_n,$$

pelo que $v_n \leq u_n$. Se $v = \lim_{n\to\infty} v_n$, passando ao limite na desigualdade

$$u_{k,n} \leq v_n \leq u_n,$$

obtemos

$$u_k \leq v \leq u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Como $u_k \uparrow u$, segue que $v = u$ μ-q.t.p. Assim, $(v_n) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ converge para u, concluindo-se que $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$.

2. O caso $(u_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$**.** Para cada $n \geq 1$, existem $v_n, w_n \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ tais que

$$u_n - u_{n-1} = v_n - w_n \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

com

$$\int_\Omega w_n \, d\mu \leq 2^{-n}.$$

Se $W_N = \sum_{n=1}^N w_n$, então (W_N) é crescente e

$$\int_\Omega W_N \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

Pelo teorema de Levi, $w = \sum_{n=1}^\infty w_n$ pertence a $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Por outro lado, definindo $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$, temos $V_N - W_N = \sum_{n=1}^N (u_n - u_{n-1}) = u_N - u_0$, isto é, $V_N = u_N - u_0 + W_N$. Passando ao limite,

$$V_N \longrightarrow u - u_0 + w \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Como $(V_N) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ é crescente, a primeira etapa mostra que $v := \sum_{n=1}^\infty v_n = u - u_0 + w$ é mensurável. Finalmente, $u = v - w + u_0$, pelo que $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$.

3. O caso geral. Substituindo u_n por $u_n - u_0$, podemos supor $u_n \geq 0$. Para cada k, escolhemos uma sucessão $(u_{k,m}) \subset \mathcal{L}(\Omega)$ tal que

$$u_{k,m} \longrightarrow u_k \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

podendo ainda supor $u_{k,m} \geq 0$. Definamos $v_{k,n} = \inf_{m \geq n} u_{k,m}$. Então

$$v_{k,n} \uparrow u_k \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

e, por aproximação por mínimos finitos e pelo teorema da convergência dominada, temos $v_{k,n} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Definindo agora

$$v_n = \max\{v_{1,n}, \ldots, v_{n,n}\},$$

obtemos uma sucessão crescente de funções de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Além disso, $v_n \leq u$, e, para todo k fixo e $n \geq k$,

$$v_n \geq v_{k,n}.$$

Passando ao limite em n,

$$\lim_{n \to \infty} v_n \geq u_k.$$

Como isto vale para todo k e $u_k \uparrow u$, concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} v_n = u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

A segunda etapa implica então que $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$, concluindo a demonstração. □

Nota 6.16. Na demonstração do teorema anterior utilizou-se a hipótese de que a função limite é finita μ-quase em toda a parte apenas para identificar o limite da construção monótona. Se forem admitidas funções com valores em $+\infty$, o resultado permanece válido mediante uma adaptação técnica do argumento.

Teorema 6.17 (Caracterização das funções mensuráveis)**.** *A classe $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ é a menor classe de funções definidas μ-quase em toda a parte que contém $\mathcal{L}(\Omega)$ e é fechada para limites μ-quase em toda a parte. Mais precisamente, se $(u_n) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ converge μ-q.t.p. para uma função finita u, então*

$$u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

Demonstração. Para cada $k \geq 1$, definamos $v_k = \sup_{n \geq k} u_n$. Então (v_k) é decrescente e

$$\lim_{k \to \infty} v_k = \limsup_{n \to \infty} u_n = u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Fixado k, introduzimos as funções

$$w_m = \max\{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+m}\}.$$

Como o máximo de um número finito de funções mensuráveis continua a ser mensurável, tem-se $w_m \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. Além disso, (w_m) é crescente e converge μ-q.t.p. para v_k. Pelo

teorema da estabilidade por convergência monótona, $v_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. Consequentemente, $(-v_k)$ é uma sucessão crescente de funções mensuráveis e

$$-v_k \longrightarrow -u \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Aplicando novamente o teorema da convergência monótona, obtemos $-u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ e, como esta classe é estável por mudança de sinal, concluímos que $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. Resta verificar a minimalidade. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de funções que contém $\mathcal{L}(\Omega)$ e que é fechada para limites μ-quase em toda a parte. Como toda a função mensurável é, por definição, limite μ-q.t.p. de uma sucessão de funções de $\mathcal{L}(\Omega)$, segue imediatamente que

$$\mathcal{M}(\Omega, \mu) \subset \mathcal{C}.$$

Logo, $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ é a menor classe com estas propriedades. □

6.6 Conjuntos mensuráveis

As funções mensuráveis permitem introduzir naturalmente a noção de conjunto mensurável. A medida de um conjunto será definida como a integral da sua função característica.

Definição 6.18 (Conjunto mensurável)**.** Um subconjunto $A \subset \Omega$ diz-se *mensurável* (relativamente a μ) se a sua função característica

$$\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

é mensurável. Nesse caso define-se a sua medida por

$$\mu(A) = \int_\Omega \chi_A \, d\mu.$$

Nota 6.19. Se A e B são conjuntos mensuráveis, então

$$\chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B), \qquad \chi_{A\cap B} = \min(\chi_A, \chi_B),$$

e

$$\chi_{\Omega\setminus A} = 1 - \chi_A.$$

Como a classe das funções mensuráveis é estável pelas operações algébricas e pela composição com funções contínuas, estas identidades sugerem que a classe dos conjuntos mensuráveis deverá ser fechada para as operações usuais da teoria dos conjuntos.

Proposição 6.20. *A classe dos conjuntos mensuráveis constitui uma σ-álgebra. Em particular,*

(i) Ω *e* $\varnothing$ *são mensuráveis;*

(ii) se A *é mensurável, então* $\Omega \setminus A$ *é mensurável;*

(iii) se (A_n) é uma sucessão de conjuntos mensuráveis, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad e \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

são conjuntos mensuráveis.

Nota 6.21. Veremos mais adiante que a noção de σ-álgebra desempenha um papel central na teoria da medida. Por agora basta saber que se trata de uma família de subconjuntos de Ω estável pelas operações naturais da teoria dos conjuntos, em particular pela passagem ao complementar e por uniões enumeráveis. O estudo sistemático desta estrutura será feito no capítulo dedicado aos espaços mensuráveis.

Demonstração. Tem-se $\chi_\Omega = 1$ e $\chi_\varnothing = 0$, pelo que Ω e $\varnothing$ são mensuráveis. Além disso, $\chi_{\Omega\setminus A} = 1 - \chi_A$, mostrando que o complementar de um conjunto mensurável continua a ser mensurável. Se (A_n) é uma sucessão de conjuntos mensuráveis, definindo

$$u_n = \max\{\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}\},$$

obtém-se uma sucessão crescente de funções mensuráveis tal que

$$u_n \uparrow \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Pelo teorema da estabilidade por convergência monótona, $\chi_{\bigcup A_n}$ é mensurável, pelo que $\bigcup A_n$ é mensurável. Finalmente,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n) \right),$$

e a mensurabilidade da interseção resulta da estabilidade por complementação. □

Proposição 6.22. *Um subconjunto $A \subset \Omega$ é μ-desprezável se, e somente se, é mensurável e*

$$\mu(A) = 0.$$

Demonstração. Suponha primeiro que A é μ-desprezável. Então

$$\chi_A = 0 \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

pelo que $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ e

$$\mu(A) = \int_\Omega \chi_A \, d\mu = 0.$$

Reciprocamente, suponha que A é mensurável e $\mu(A) = 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega n\chi_A \, d\mu = n\mu(A) = 0.$$

Como a sucessão $(n\chi_A)$ é crescente, o teorema de Levi implica que o seu limite é finito μ-q.t.p. Ora,

$$\lim_{n\to\infty} n\chi_A(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Consequentemente, A é μ-desprezável. □

6.7 Integrais múltiplas

Neste capítulo estudamos a integração de funções definidas num produto de espaços de medida. A construção segue a mesma filosofia desenvolvida ao longo deste livro: parte-se da integral elementar, estende-se a teoria às funções não negativas por aproximação monótona e, finalmente, às funções integráveis. O ponto de partida consiste na noção de *integral elemento produto*, que permite definir naturalmente as integrais iteradas. A partir desta definição obtêm-se os teoremas de Fubini e de Tonelli.

Nota 6.23 (Integral de Riemann múltipla). No caso particular da medida de Lebesgue, isto é, quando

$$\mu = dx, \qquad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

a integral elemento produto coincide com a integral múltipla de Riemann.
Mais precisamente, para toda

$$u \in (\mathcal{C}_c(\Omega), dx),$$

verificam-se as propriedades seguintes:

(a) Para todo $x_2 \in \Omega_2$,
$$u(\cdot, x_2) \in (\mathcal{C}_c(\Omega_1), (dx)_1).$$

(b) A função
$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\,(dx)_1$$
pertence a $(\mathcal{C}_c(\Omega_2), (dx)_2)$.

(c) Vale a fórmula de integração iterada
$$\int_{\Omega} u(x_1, x_2)\,dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\,(dx)_1 \right) (dx)_2.$$

Este resultado motiva a definição abstrata introduzida na secção seguinte.

6.7.1 Integral de Lebesgue múltipla

Definição 6.24 (Integral elemento produto)**.** Sejam

$$(\Omega_1, \mu_1), \qquad (\Omega_2, \mu_2)$$

dois espaços munidos de integrais elementares.
Diz-se que a integral elementar μ em

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

é o *produto* de μ_1 e μ_2 se, para toda função

$$u \in \mathcal{L}(\Omega, \mu),$$

se verificarem as seguintes propriedades.

(a) Para todo $x_2 \in \Omega_2$,
$$u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}(\Omega_1, \mu_1).$$

(b) A função

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

pertence a $\mathcal{L}(\Omega_2, \mu_2)$.

(c) Vale a fórmula de integração iterada

$$\int_{\Omega} u(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Doravante supomos fixada a integral elemento produto de μ_1 e μ_2.

Lema 6.25. *Seja $u \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$.*
Então:

(a) Para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, temos

$$u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1).$$

(b) A função

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

pertence a $\mathcal{L}^+(\Omega_2, \mu_2)$.

(c) (Teorema de Fubini em $\mathcal{L}^+$)

$$\int_{\Omega} u(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Nota 6.26. Naturalmente, os papéis de Ω_1 e Ω_2 podem ser trocados.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{L}(\Omega, \mu)$ uma sucessão fundamental crescente tal que $u_n \uparrow u$. Para cada n, definamos

$$v_n(x_2) = \int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2)\, d\mu_1.$$

Pela definição de integral elemento produto, $v_n \in \mathcal{L}(\Omega_2, \mu_2)$, e a sucessão (v_n) é crescente. Além disso,

$$\int_{\Omega_2} v_n\, d\mu_2 = \int_{\Omega} u_n\, d\mu.$$

Como $\sup_n \int_\Omega u_n\, d\mu < \infty$, o teorema da convergência monótona implica que existe $v \in \mathcal{L}^+(\Omega_2, \mu_2)$ tal que $v_n \uparrow v$ e

$$\int_{\Omega_2} v\, d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} v_n\, d\mu_2 = \int_{\Omega} u\, d\mu.$$

Isto demonstra simultaneamente as propriedades (b) e (c). Finalmente, $v(x_2) < \infty$ para quase todo x_2. Fixado um desses pontos, a sucessão $u_n(\cdot, x_2)$ é crescente em $\mathcal{L}(\Omega_1, \mu_1)$ e possui integrais uniformemente limitadas por $v(x_2)$. Pela convergência monótona em $\mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1)$, conclui-se que $u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1)$, obtendo-se (a).

□

6.7.2 Conjuntos desprezáveis

O resultado seguinte mostra que a noção de conjunto desprezável é compatível com a passagem às secções.

Lema 6.27 (Secção de conjunto desprezável)**.** *Seja $S \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ um conjunto desprezável relativamente a μ. Então, para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, a secção*

$$S_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1;\ (x_1, x_2) \in S\}$$

é desprezável relativamente a μ_1.

Demonstração. Como S é desprezável, existe $u \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$ tal que

$$S \subset \{(x_1, x_2) \in \Omega;\ u(x_1, x_2) = +\infty\}.$$

Pelo lema anterior, para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, temos $u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1)$. Para tais pontos, $S_{x_2} \subset \{x_1 \in \Omega_1;\ u(x_1, x_2) = +\infty\}$, e, pela definição de $\mathcal{L}^+$, o conjunto do lado direito é desprezável. Logo, S_{x_2} é desprezável relativamente a μ_1.

□

6.7.3 Teorema de Fubini

O resultado anterior permite estender a fórmula de integração iterada às funções integráveis.

Teorema 6.28 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Então*

(a) Para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, temos

$$u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1).$$

(b) A função

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

pertence a $\mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$.

(c) Vale a igualdade

$$\int_\Omega u(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Demonstração. Escrevamos $u = f - g$, onde $f, g \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$. Pelo lema precedente, para quase todo $x_2 \in \Omega_2$, temos $f(\cdot, x_2)$, $g(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1)$, e, consequentemente,

$$u(\cdot, x_2) = f(\cdot, x_2) - g(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1).$$

Isto demonstra (a). Além disso,

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1, \qquad x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

pertencem a $\mathcal{L}^+(\Omega_2, \mu_2)$. A sua diferença é precisamente

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1,$$

o que demonstra (b). Finalmente,

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f\, d\mu_1 \right) d\mu_2, \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega g\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} g\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Subtraindo as duas igualdades, obtemos

$$\int_\Omega u\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2,$$

o que conclui a demonstração.

□

6.7.4 Teorema de Tonelli

O lema seguinte constitui o principal ingrediente técnico da demonstração do teorema de Tonelli.

Lema 6.29 (Lema das truncaturas)**.** *Seja $u : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável e, para cada $n \geq 1$, defina-se $u_n := u \wedge n$. Então:*

(a)

$$u_n \uparrow u \qquad \textit{pontualmente.}$$

(b) Para quase todo $x_2 \in \Omega_2$,

$$u_n(\cdot, x_2) \uparrow u(\cdot, x_2), \qquad e \qquad \int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2)\, d\mu_1 \uparrow \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1.$$

(c)

$$\int_\Omega u_n\, d\mu \uparrow \int_\Omega u\, d\mu.$$

(d)

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2 \uparrow \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Demonstração. A propriedade (a) é imediata. Como $u_n(\cdot, x_2) \uparrow u(\cdot, x_2)$, o Teorema da convergência monótona aplicado em (Ω_1, μ_1) fornece, para quase todo x_2,

$$\int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2)\, d\mu_1 \uparrow \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1,$$

o que demonstra (b). A propriedade (c) é consequência do Teorema da Convergência Monótona em (Ω, μ). Finalmente, as funções

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2)\, d\mu_1$$

formam uma sucessão crescente por (b). Aplicando novamente o Teorema da Convergência Monótona em (Ω_2, μ_2), obtemos

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u_n \, d\mu_1 \right) d\mu_2 \uparrow \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u \, d\mu_1 \right) d\mu_2,$$

concluindo a demonstração. □

Teorema 6.30 (Teorema de Tonelli)**.** *Seja $u : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então, para quase todo $x_2 \in \Omega_2$,*

$$u(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1, \mu_1),$$

a função

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2) \, d\mu_1$$

pertence a $\mathcal{L}^+(\Omega_2, \mu_2)$ e

$$\int_{\Omega} u(x_1, x_2) \, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2) \, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, considere $u_n = u \wedge n$. Como $u_n \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mu)$, o Teorema de Fubini em $\mathcal{L}^+$ fornece

$$\int_{\Omega} u_n \, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u_n(x_1, x_2) \, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Fazendo $n \to \infty$ e aplicando o lema anterior aos dois membros da igualdade, obtemos

$$\int_{\Omega} u \, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2) \, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

As restantes afirmações decorrem diretamente do lema. □

Exercício 52 (M)

Seja $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ mensurável relativamente à medida produto $\mu_1 \otimes \mu_2$. Mostre que se, para μ_2-quase todo $x_2 \in \Omega_2$, o conjunto seccional

$$S_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in S\}$$

é desprezável com respeito a μ_1, então S é desprezável com respeito a $\mu_1 \otimes \mu_2$.
Sugestão: aplicar o teorema de Tonelli à função caraterística χ_S.

Nota histórica

O estudo dos integrais múltiplos remonta ao princípio de Cavalieri e aos trabalhos de Euler. No contexto da integração de Lebesgue, Henri Lebesgue demonstrou, em 1904, uma primeira versão do resultado para funções mensuráveis limitadas. Em 1907, Guido Fubini estabeleceu que, para uma função integrável, o integral múltiplo pode ser calculado por integrais sucessivos e que a ordem de integração pode

ser permutada [34]. Dois anos mais tarde, Leonida Tonelli demonstrou o resultado correspondente para funções mensuráveis não negativas, sem exigir que o integral seja finito [73]. Os dois resultados são atualmente apresentados em conjunto sob a designação de Teorema de Fubini–Tonelli. O Teorema de Tonelli aplica-se primeiro a funções não negativas e permite que os integrais assumam o valor $+\infty$; o Teorema de Fubini aplica-se depois a funções integráveis, isto é, às funções f tais que

$$\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu \otimes \nu) < \infty,$$

garantindo que os integrais sucessivos são finitos quase em toda a parte e possuem o mesmo valor.

Capítulo 7

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e funções mensuráveis

Neste capítulo especializamos a teoria abstrata da integração desenvolvida na primeira parte do livro ao caso do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. A estrutura topológica deste espaço permite construir a medida de Lebesgue a partir da integral elementar de Riemann definida sobre funções contínuas de suporte compacto.

Nota histórica

A generalização das noções de comprimento, área e volume constituiu um dos grandes desafios da Análise no final do século XIX. A construção da medida de Lebesgue, publicada em 1902, permitiu atribuir um volume a uma vasta classe de conjuntos preservando a aditividade e tornando possível o desenvolvimento da integração moderna. Alguns anos mais tarde, Percy Daniell mostrou que essa medida pode igualmente ser obtida a partir de uma integral positiva definida sobre funções suficientemente regulares.
Na primeira parte deste livro, desenvolvemos a teoria da integração segundo a abordagem de Daniell, na qual a medida é induzida pela integral. Mostraremos agora que, no caso particular de $\mathbb{R}^N$, a medida positiva assim obtida coincide exatamente com a medida de Lebesgue.

7.1 Construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$

Definição 7.1 (Construção da medida de Lebesgue)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. A *medida de Lebesgue* em Ω é a medida positiva induzida pela integral elementar de Riemann

$$\mathcal{C}_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u \longmapsto \int_\Omega u\,dx.$$

Assim, a mensurabilidade de Lebesgue é definida a partir do espaço $\mathcal{C}_c(\Omega)$ das funções contínuas de suporte compacto, exatamente como na construção abstrata desenvolvida anteriormente.

A medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \Omega$ é dada por

$$m(A) := \int_\Omega \chi_A \, dx.$$

A operação de truncamento desempenha um papel fundamental no estudo da mensurabilidade e será utilizada repetidamente ao longo deste capítulo.

Nota 7.2 (Truncamento). Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $t > 0$. O truncamento de u ao nível t é definido por

$$u_t := \min\{u, t\}.$$

Como a função $s \longmapsto \min\{s, t\}$ é contínua, segue imediatamente que

$$u \in \mathcal{C}_c(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u_t \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Mais geralmente,

$$u \in \mathcal{M}(\Omega, dx) \quad \Longrightarrow \quad u_t \in \mathcal{M}(\Omega, dx).$$

De facto, se $(u_n) \subset \mathcal{C}_c(\Omega)$ converge para u μ-q.t.p., então

$$\min\{u_n, t\} \longrightarrow \min\{u, t\} \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

e, como $\min\{u_n, t\} \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ para todo n, concluímos que u_t é igualmente mensurável.

As funções truncadas permitem caracterizar a mensurabilidade através dos seus conjuntos de nível, que constituem o objeto de estudo da secção seguinte.

7.2 Conjuntos de nível e princípio de Cavalieri

Os conjuntos de nível fornecem uma caracterização simples da mensurabilidade de uma função não negativa. Além disso, permitem obter uma representação geométrica da integral através do princípio de Cavalieri, um dos resultados fundamentais da teoria da integração.

Teorema 7.3 (Caracterização da mensurabilidade pelos conjuntos de nível)**.** *Seja μ a medida de Lebesgue em Ω e $u : \Omega \to [0, +\infty]$ finita μ-q.t.p. São equivalentes:*

1. *u é mensurável;*
2. *para todo $t \geq 0$, o conjunto de nível*

$$\{u > t\} := \{x \in \Omega : \, u(x) > t\}$$

é mensurável.

Demonstração. Suponhamos que u seja mensurável. Para cada $t \geq 0$ e $n \geq 1$, definamos

$$u_n := n\big[\min(u, t + 1/n) - \min(u, t)\big].$$

Pela observação sobre truncamentos, u_n é mensurável. Além disso,

$$\chi_{\{u>t\}} = \lim_{n\to\infty} u_n,$$

pelo que $\chi_{\{u>t\}} \in \mathcal{M}$. Reciprocamente, suponhamos que todos os conjuntos $\{u > t\}$ sejam mensuráveis. Para cada $n \geq 1$, definamos

$$u_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \chi_{\{u>k/2^n\}}.$$

Então $u_n = \frac{1}{2^n}\lfloor 2^n u \rfloor$, de modo que

$$u_n \leq u \leq u_n + \frac{1}{2^n}.$$

Logo, (u_n) converge pontualmente para u. Como cada u_n é mensurável, concluímos que $u \in \mathcal{M}$. □

Corolário 7.4 (Produto de funções mensuráveis)**.** *Se $u, v \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$, então*

$$uv \in \mathcal{M}(\Omega, \mu).$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, se $w \in \mathcal{M}$, então $w^2 \in \mathcal{M}$, pois, para todo $t \geq 0$,

$$\{w^2 > t\} = \{|w| > \sqrt{t}\}$$

é mensurável. Aplicando este resultado a $w = u + v$ e a $w = u - v$, obtemos $(u+v)^2$, $(u-v)^2 \in \mathcal{M}$. Como

$$uv = \frac{1}{4}\Big[(u+v)^2 - (u-v)^2\Big],$$

segue que $uv \in \mathcal{M}$. □

Definição 7.5 (Função de distribuição)**.** Seja $u : \Omega \to [0, +\infty]$ mensurável. A função

$$\mu_u : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty]$$

definida por

$$\mu_u(t) := \mu(\{u > t\})$$

chama-se *função de distribuição* de u. Diremos que u é *admissível* se

$$\mu_u(t) < \infty, \qquad \forall\, t > 0.$$

Corolário 7.6 (Princípio de Cavalieri)**.** *Seja $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ com $u \geq 0$. Então*

$$\int_\Omega u \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu_u(t)\, dt.$$

Demonstração. A sucessão (u_n) construída na demonstração do teorema anterior é crescente e converge pontualmente para u. Além disso, a função $\mu_u : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é monótona decrescente, sendo portanto integrável no sentido de Riemann em qualquer intervalo compacto. Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega u_n \, d\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_u\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

A última igualdade corresponde precisamente às somas de Riemann da função monótona μ_u. Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega u \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu_u(t) \, dt.$$

□

Nota 7.7. O princípio de Cavalieri exprime a integral de uma função não negativa em termos da medida dos seus conjuntos de nível. Geometricamente, pode ser interpretado como a identidade

$$\text{Volume} = \int_0^{+\infty} \text{Área da secção ao nível } t \, dt.$$

7.3 Regularidade e conjuntos desprezáveis

7.3.1 Regularidade da medida de Lebesgue

A medida de Lebesgue possui importantes propriedades de regularidade. Em particular, todo o conjunto mensurável pode ser aproximado, salvo um conjunto desprezável, por conjuntos abertos e por conjuntos fechados. Estas propriedades desempenham um papel central na Análise e serão utilizadas repetidamente ao longo deste capítulo.

Teorema 7.8 (Regularidade da medida de Lebesgue)**.** *Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.*

(a) Todo o conjunto aberto é mensurável e todo o conjunto fechado é mensurável.

(b) Para todo o conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$, existe uma sucessão (G_k) de conjuntos abertos e um conjunto desprezável $S \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$A \cup S = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

(c) Para todo o conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$, existe uma sucessão (F_k) de conjuntos fechados e um conjunto desprezável $T \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cup T.$$

Demonstração. Demonstração de (a). Seja inicialmente $G \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Definamos

$$u_n(x) = \min\{1, n \, d(x, \mathbb{R}^N \setminus G)\},$$

onde $d(x, A)$ representa a distância de x ao conjunto A. Como a função distância e a função mínimo são contínuas, $u_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $\text{spt}(u_n) \subset G$ e G é limitado.

Além disso, $u_n(x) \longrightarrow \chi_G(x)$. Concluímos que G é mensurável. Se agora G é um conjunto aberto arbitrário, definamos

$$G_n := G \cap B(0,n).$$

Cada G_n é aberto, limitado e, portanto, mensurável. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, segue que G é mensurável. Finalmente, todo o conjunto fechado é mensurável, pois é o complemento de um conjunto aberto.

Demonstração de (b). Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável. Pela definição de mensurabilidade, existe uma sucessão $(u_n) \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ e um conjunto desprezável $R \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$u_n \longrightarrow \chi_A \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus R.$$

Existe ainda uma função $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$ tal que $R \subset S := \{f = +\infty\}$. Como f é o supremo de funções inferiormente semicontínuas, é também inferiormente semicontínua. Consequentemente, $\{f > t\}$ é aberto para todo $t \in \mathbb{R}$. Definamos

$$U_n = \{u_n > 1/2\} \cup \{f > n\}, \qquad G_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} U_n.$$

Então (G_k) é uma sucessão decrescente de conjuntos abertos e $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = A \cup S$. Como S é desprezável,

$$A \cup S = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Demonstração de (c). Seja $B = \mathbb{R}^N \setminus A$. Pelo item (b),

$$B \cup S = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Definindo $F_k = \mathbb{R}^N \setminus G_k$, obtemos uma sucessão de conjuntos fechados e

$$A \cap (\mathbb{R}^N \setminus S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Tomando $T = A \cap S$, segue que

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \cup T.$$

□

7.3.2 Conjuntos desprezáveis pela medida de Lebesgue

Os conjuntos de medida nula desempenham um papel fundamental na teoria da medida e da integração. Embora possam conter infinitos pontos, o seu "volume"é nulo e, por conseguinte, não influenciam o valor das integrais. Muitas propriedades importantes da Análise são válidas apenas fora de um conjunto desprezável, razão pela qual estes conjuntos desempenham um papel central em toda a teoria de Lebesgue.

Nota histórica

A noção de conjunto de medida nula remonta aos trabalhos de **Émile Borel**, que estudou coberturas de subconjuntos de $\mathbb{R}$ por intervalos de comprimento total arbitrariamente pequeno. Henri Lebesgue incorporou esta ideia na construção da sua medida, obtendo uma teoria muito mais flexível do que a baseada apenas em intervalos.

Proposição 7.9 (Medida dos intervalos)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então*

$$\mu((a,b)) = \mu([a,b]) = b - a.$$

Em particular, $\mu(\{a\}) = 0$.

Demonstração. Consideremos a sucessão de funções contínuas (u_n) definida por

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ n(x-a), & a < x < a + \frac{1}{n}, \\ 1, & a + \frac{1}{n} \le x \le b - \frac{1}{n}, \\ n(b-x), & b - \frac{1}{n} < x < b, \\ 0, & x \ge b. \end{cases}$$

Temos

$$0 \le u_n \le 1, \qquad u_n \uparrow \chi_{(a,b)}.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\mu((a,b)) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n\, dx.$$

Ora,

$$\int_{\mathbb{R}} u_n\, dx = \left(b - a - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = b - a - \frac{1}{n}.$$

Passando ao limite, $\mu((a,b)) = b - a$. Além disso, $[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$, união disjunta. Como $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, segue que $\mu([a,b]) = \mu((a,b)) = b - a$. □

Definição 7.10 (Conjunto desprezável)**.** Um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$ diz-se *desprezável* (ou de *medida nula*) quando

$$\mu(A) = 0.$$

Equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma família enumerável de cubos abertos (Q_k) tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon,$$

onde $|Q_k|$ representa o volume de Q_k.

Proposição 7.11. *Todo o conjunto finito de $\mathbb{R}^N$ é desprezável.*

Demonstração. Seja $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $i = 1, \ldots, m$ escolhemos um cubo aberto Q_i centrado em x_i tal que $|Q_i| < \frac{\varepsilon}{m}$. Então $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$ e

$$\sum_{i=1}^{m} |Q_i| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue da definição que $\mu(A) = 0$. □

Proposição 7.12. *Todo o conjunto contável de $\mathbb{R}^N$ é desprezável.*

Demonstração. Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$, escolhemos um cubo aberto Q_n centrado em x_n satisfazendo $|Q_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Então $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Como isto vale para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\mu(A) = 0$. □

Nota 7.13. Em particular, todo o conjunto finito ou contável tem medida de Lebesgue nula. A recíproca é falsa: existem conjuntos não contáveis de medida nula. O exemplo mais célebre é o conjunto de Cantor, que mostra que a medida de Lebesgue constitui uma noção geométrica de tamanho e não uma medida da cardinalidade de um conjunto.

Exercício 53 (F)

1. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: todo o conjunto aberto de $\mathbb{R}$ com medida de Lebesgue finita é limitado.
2. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: existe um conjunto aberto e denso em $[0, 1]$ com medida de Lebesgue nula.
3. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: existe um conjunto aberto e denso em $[0, 1]$ com medida de Lebesgue estritamente menor do que 1.

Exercício 54 (M)

1. **Aproximação por abertos.** Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e seja $\varepsilon > 0$. Provar que existe um conjunto aberto $G \supset A$ tal que

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon.$$

2. **Aproximação por fechados.** Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e seja $\varepsilon > 0$. Provar que existe um conjunto fechado $F \subset A$ tal que

$$\mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Exercício 55 (D)

1. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e tal que f' é limitada em $(0,1)$. Mostrar que

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

2. Mostrar, mediante um contraexemplo, que não se pode substituir a hipótese de que f é derivável em $(0,1)$ pela hipótese de que f é derivável quase em toda a parte em $(0,1)$.

Definição 7.14 (Integral do Cálculo)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *Cálculo-integrável* em $[a,b]$ se existe uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), tal que

$$F' = f \qquad \text{em } (a,b).$$

Neste caso, define-se

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a).$$

Exercício 56 (F)

1. Dar um exemplo de uma função Lebesgue-integrável em $[0,1]$ que não seja Cálculo-integrável.
2. Dar um exemplo de uma função Cálculo-integrável em $[0,1]$ que não seja Lebesgue-integrável. Considerar, para esse efeito, uma integral imprópria.

7.4 Medida positiva

Nesta secção construímos uma medida a partir de um integral elementar positivo definido num reticulado de funções. A ideia consiste em aproximar a função característica de um conjunto por funções do espaço $\mathcal{L}$, definindo a sua medida como o supremo dos integrais dessas aproximações.

Definição 7.15 (Reticulado)**.** Seja Ω um conjunto. Um espaço $\mathcal{L}$ de funções reais sobre Ω diz-se um *reticulado* se, para quaisquer $f, g \in \mathcal{L}$,

$$\max(f,g), \qquad \min(f,g) \in \mathcal{L}.$$

Em particular, para toda função $f \in \mathcal{L}$, as partes positiva e negativa

$$f^+ := \max(f, 0), \qquad f^- := \max(-f, 0)$$

pertencem a $\mathcal{L}$.

Definição 7.16 (Integral elementar positivo)**.** Seja Ω um conjunto e seja $\mathcal{L}$ um reticulado de funções reais sobre Ω. Um *integral elementar positivo* é uma aplicação linear $\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(f) \geq 0.$$

A positividade decorre da condição (iii) da definição de integral elementar.

Definição 7.17 (Medida positiva)**.** Seja $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ um espaço com integral elementar positivo. Para cada subconjunto $A \subset \Omega$, define-se a *medida positiva* de A por

$$\mu^+(A) := \sup \{\mu(f) : f \in \mathcal{L},\ 0 \leq f \leq \chi_A\}. \tag{7.1}$$

A definição anterior exprime uma ideia simples: a medida de um conjunto é obtida aproximando a sua função característica por funções do espaço $\mathcal{L}$ que permanecem abaixo de χ_A. O resultado seguinte mostra que, no caso de $\mathbb{R}^N$, esta aproximação pode ser construída de forma explícita.

Lema 7.18 (Aproximação interior de conjuntos abertos)**.** *Seja $\mathcal{L} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ e seja $\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ um integral elementar positivo. Se $A \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, existe uma sucessão $(f_n) \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$0 \leq f_n \leq \chi_A, \qquad f_n \uparrow \chi_A \quad \textit{pontualmente em } \mathbb{R}^N.$$

Em particular, $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mu)$.

Demonstração. Suponhamos primeiro que $A \neq \mathbb{R}^N$. Para cada $n \in \mathbb{N}_*$, definamos

$$f_n(x) := \min\left\{1,\ n\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus A),\ (n + 1 - |x|)^+\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

A função distância a um conjunto fechado é contínua; além disso, $(n + 1 - |x|)^+$ é contínua e tem suporte compacto. Portanto, $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Os três termos que definem f_n desempenham papéis distintos:

- o primeiro assegura que $f_n \leq 1$;
- o segundo garante que $f_n = 0$ fora de A;
- o terceiro confere suporte compacto a f_n.

Consequentemente,

$$0 \leq f_n \leq \chi_A.$$

Se $x \notin A$, então $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus A) = 0$, pelo que $f_n(x) = 0$. Se $x \in A$, temos

$$\delta := \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus A) > 0.$$

Como

$$n\delta \longrightarrow +\infty \quad \text{e} \quad (n+1-|x|)^+ \longrightarrow +\infty,$$

segue que existe $N \in \mathbb{N}_*$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$n\delta \geq 1 \quad \text{e} \quad (n+1-|x|)^+ \geq 1.$$

Logo, $f_n(x) = 1 = \chi_A(x)$. Assim,

$$f_n(x) \uparrow \chi_A(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

logo $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mu)$. □

O resultado seguinte mostra que, sempre que a função característica é mensurável, a medida positiva coincide com o integral dessa função.

Teorema 7.19 (Identificação da medida positiva)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ um espaço com integral elementar positivo e seja $A \subset \Omega$ tal que $\chi_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$. Então,*

$$\mu^+(A) = \int_\Omega \chi_A \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $(f_n) \subset \mathcal{L}$ uma sucessão crescente tal que

$$0 \leq f_n \leq \chi_A, \qquad f_n \uparrow \chi_A.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_\Omega \chi_A \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

Como $0 \leq f_n \leq \chi_A$, segue da definição de $\mu^+(A)$ que $\mu(f_n) \leq \mu^+(A)$, para todo n. Passando ao limite,

$$\int_\Omega \chi_A \, d\mu \leq \mu^+(A).$$

Por outro lado, seja $f \in \mathcal{L}$ tal que $0 \leq f \leq \chi_A$. Pela monotonicidade da integral,

$$\mu(f) = \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega \chi_A \, d\mu.$$

Tomando o supremo sobre todas as funções admissíveis,

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(f) : f \in \mathcal{L},\ 0 \leq f \leq \chi_A\} \leq \int_\Omega \chi_A \, d\mu.$$

Concluímos que

$$\mu^+(A) = \int_\Omega \chi_A \, d\mu.$$

□

Nota 7.20. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\mathcal{L} = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, o lema anterior fornece uma construção explícita de uma sucessão crescente convergindo para χ_A. No contexto abstrato da

teoria de Daniell, a existência de tais aproximações é assegurada pelas propriedades do espaço $\mathcal{L}$, em particular pela estabilidade por truncamento.

7.4.1 A propriedade de truncamento

A construção da medida positiva apresentada nesta secção baseia-se na estrutura geométrica de $\mathbb{R}^N$. Com efeito, a aproximação da função característica de um conjunto aberto foi obtida através da função distância e de funções contínuas de suporte compacto. Estes argumentos deixam de estar disponíveis quando se pretende desenvolver a teoria num espaço abstrato.

A abordagem de Daniell consiste em substituir a geometria por propriedades estruturais do reticulado de funções admissíveis. Entre elas, desempenha um papel central a propriedade de truncamento.

Definição 7.21 (Propriedade de truncamento)**.** Seja $\mathcal{L}$ um reticulado de funções reais sobre Ω. Diz-se que $\mathcal{L}$ satisfaz a *propriedade de truncamento*, abreviadamente (ET), se

$$f \in \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad f \wedge 1 := \min(f, 1) \in \mathcal{L}.$$

A propriedade (ET) garante que qualquer função positiva pode ser truncada ao nível 1 sem abandonar o espaço $\mathcal{L}$. Em conjunto com a estrutura de reticulado, ela assegura igualmente a estabilidade das operações de máximo, mínimo e truncamento, permitindo construir novas funções admissíveis a partir de funções já pertencentes ao espaço funcional. É importante notar que a definição da medida positiva

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(f) : f \in \mathcal{L},\ 0 \leq f \leq \chi_A\}$$

permanece inalterada no contexto abstrato. O papel da propriedade (ET) não é modificar esta definição, mas fornecer a estabilidade necessária para o desenvolvimento da teoria de Daniell. Em particular, a propriedade (ET) intervém de forma essencial na construção da extensão da integral elementar, na demonstração do Teorema da Convergência Monótona em contexto abstrato e na identificação da medida associada. Assim, enquanto em $\mathbb{R}^N$ a aproximação de funções características resulta da geometria do espaço, na teoria abstrata é a estrutura do reticulado que fornece os instrumentos necessários para desenvolver a integração e a teoria da medida.

Capítulo 8

Espaços L^p

8.1 Convexidade e desigualdades notáveis

As desigualdades fundamentais dos espaços L^p têm origem na teoria das funções convexas. Nesta secção apresentamos os conceitos básicos de convexidade e estabelecemos uma desigualdade geral da qual decorrerão naturalmente as desigualdades de Hölder, Minkowski e Hanner.

8.1.1 Definições e propriedades básicas

Definição 8.1 (Conjunto convexo)**.** Seja X um espaço vetorial real. Um subconjunto $C \subset X$ diz-se *convexo* se, para todos $u, v \in C$ e todo $0 < \lambda < 1$,

$$(1-\lambda)u + \lambda v \in C.$$

Um ponto $x \in C$ diz-se *interior* a C se, para todo $y \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x + \varepsilon y \in C.$$

O conjunto dos pontos interiores de C é denotado por $\operatorname{int} C$. Um subconjunto $C \subset X$ diz-se um *cone* se

$$x \in C,\ \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda x \in C.$$

Definição 8.2 (Função convexa)**.** Seja $C \subset X$ um conjunto convexo. Uma função

$$F : C \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

diz-se *convexa* se, para todos $x, y \in C$ e $0 < \lambda < 1$,

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y).$$

A função F diz-se *côncava* se $-F$ é convexa. Se C é um cone, diz-se que F é *positivamente homogénea* se

$$F(\lambda x) = \lambda F(x), \qquad \forall\, x \in C,\ \forall\, \lambda > 0.$$

O resultado seguinte constitui a principal ferramenta para demonstrar a desigualdade de convexidade.

Lema 8.3 (Lema técnico)**.** *Seja Y um hiperplano de um espaço vetorial real X, $f : Y \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear e $F : X \to]-\infty, +\infty]$ convexa e positivamente homogénea. Suponhamos que $f \leq F$ em Y e $Y \cap \operatorname{int}\{x \in X : F(x) < +\infty\} \neq \varnothing$. Então existe uma aplicação linear $g : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$g \leq F \quad \text{em } X, \qquad g|_Y = f.$$

Demonstração. Escolha-se $z \in X$ tal que $X = Y \oplus \mathbb{R}z$. Pretende-se determinar $c \in \mathbb{R}$ de modo que $g(y + tz) := f(y) + ct$ satisfaça

$$g(y + tz) \leq F(y + tz), \qquad \forall\, y \in Y,\ t \in \mathbb{R}.$$

Se $t > 0$, esta condição equivale a

$$\langle f, y/t\rangle + c \leq F(y/t + z),$$

enquanto, para $t < 0$,

$$\langle f, y/(-t)\rangle - c \leq F(y/(-t) - z).$$

Definindo

$$a := \sup_{u \in Y} \big(\langle f, u\rangle - F(u - z)\big), \qquad b := \inf_{v \in Y} \big(F(v + z) - \langle f, v\rangle\big),$$

a hipótese $Y \cap \operatorname{int}\{F < +\infty\} \neq \varnothing$ garante que $-\infty < a \leq b < +\infty$. Escolhendo qualquer $c \in [a, b]$, obtém-se a extensão pretendida. □

Lema 8.4. *Seja*

$$C_+^\circ := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 > 0\},$$

e seja $F : C_+^\circ \to \mathbb{R}$ positivamente homogénea. Se a função $t \longmapsto F(t, 1)$ é convexa (respetivamente, côncava), então F é convexa (respetivamente, côncava). Em particular, no caso côncavo,

$$F(x + y) \geq F(x) + F(y), \qquad x, y \in C_+^\circ.$$

Demonstração. Se F é convexa, então a sua restrição à reta $\{(t, 1) : t \geq 0\}$ é convexa, pelo que φ é convexa. Reciprocamente, pela homogeneidade positiva,

$$F(x_1, x_2) = x_2 \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Se $x, y \in C_+^\circ$ e $0 < \lambda < 1$, ponhámos $s = (1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2$. Pela convexidade de φ,

$$\begin{aligned} F((1-\lambda)x + \lambda y) &= s\,\varphi\left(\frac{(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1}{s}\right) \\ &\leq (1-\lambda)x_2 \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \lambda y_2 \varphi\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y). \end{aligned}$$

Logo, F é convexa. O caso côncavo segue aplicando o resultado anterior à função $-F$; equivalentemente, obtém-se

$$F(x + y) \geq F(x) + F(y),$$

o que, pela homogeneidade positiva de F, equivale à concavidade. □

8.1.2 Desigualdade de convexidade

O teorema seguinte, devido a Roselli e Willem, constitui a principal ferramenta para a demonstração das desigualdades de Hölder, Minkowski e Hanner.

Teorema 8.5 (Roselli–Willem)**.** *Seja $F : C_+ \to \mathbb{R}$ positivamente homogénea e convexa. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ são não negativas, então*

$$F\left(\int_\Omega u_1 \, d\mu, \int_\Omega u_2 \, d\mu\right) \leq \int_\Omega F(u_1, u_2) \, d\mu.$$

Se F for côncava, a desigualdade inverte-se.

Demonstração. Definamos

$$y_j := \int_\Omega u_j \, d\mu, \qquad j = 1, 2.$$

Pelo Lema técnico, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq F(x_1, x_2), \qquad \forall\, (x_1, x_2) \in C_+,$$

e $\alpha y_1 + \beta y_2 = F(y_1, y_2)$. Como

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \leq F(u_1, u_2) \quad \text{q.t.p.},$$

obtemos

$$F\left(\int_\Omega u_1 \, d\mu, \int_\Omega u_2 \, d\mu\right) = \alpha \int_\Omega u_1 \, d\mu + \beta \int_\Omega u_2 \, d\mu = \int_\Omega (\alpha u_1 + \beta u_2) \, d\mu \leq \int_\Omega F(u_1, u_2) \, d\mu,$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 8.6. A função

$$F(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

é positivamente homogénea e côncava em C_+. Pelo teorema anterior,

$$\int_\Omega |vw|^{1/2} \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |v| \, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w| \, d\mu\right)^{1/2},$$

para todas as funções $v, w \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.
Tomando $v = u^2$ e $w = v^2$, obtemos a desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Definição 8.7. Seja $1 < p < \infty$. Define-se

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu) : \int_\Omega |u|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

O expoente conjugado p' é definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

8.1.3 Desigualdades de Hölder, Minkowski e Hanner

Teorema 8.8 (Desigualdades notáveis)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e p' o expoente conjugado de p.*

(a) ***(Hölder)*** *Se $v \in L^p(\Omega, \mu)$ e $w \in L^{p'}(\Omega, \mu)$, então*

$$\int_\Omega |vw| \, d\mu \leq \|v\|_p \, \|w\|_{p'}.$$

(b) ***(Minkowski)*** *Se $v, w \in L^p(\Omega, \mu)$, então*

$$\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p.$$

(c) ***(Hanner)*** *Se $v, w \in L^p(\Omega, \mu)$, então, para $2 \leq p < \infty$,*

$$\|v + w\|_p^p + \|v - w\|_p^p \leq (\|v\|_p + \|w\|_p)^p + |\|v\|_p - \|w\|_p|^p.$$

Para $1 < p \leq 2$, a desigualdade inverte-se.

Demonstração. Consideremos as funções

$$F(x_1, x_2) = x_1^{1/p} x_2^{1/p'}, \qquad G(x_1, x_2) = \left(x_1^{1/p} + x_2^{1/p}\right)^p,$$

e

$$H(x_1, x_2) = \left(x_1^{1/p} + x_2^{1/p}\right)^p + \left|x_1^{1/p} - x_2^{1/p}\right|^p.$$

Pelo lema anterior, basta verificar que F é côncava e que G e H são convexas em C_+. Aplicando a desigualdade de convexidade a F com $(|v|^p, |w|^{p'})$, obtém-se a desigualdade de Hölder. Aplicando-a a G com $(|v|^p, |w|^p)$, deduz-se a desigualdade de Minkowski. Finalmente, aplicando-a a H, obtém-se a desigualdade de Hanner. □

Nota 8.9 (Sobre a desigualdade de Hanner). A desigualdade de Hanner é menos utilizada em aplicações do que as desigualdades de Hölder e de Minkowski. No entanto, desempenha um papel fundamental na geometria dos espaços $L^p(\Omega, \mu)$. Em particular, permite demonstrar que estes espaços são uniformemente convexos para $1 < p < \infty$. Como consequência, obtém-se, entre outras propriedades, a reflexividade de $L^p(\Omega, \mu)$.

Exercício 57 (D)

(i) Mostrar que, se $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e finita, então f é contínua.
(ii) Mostrar que f é Lipschitz contínua em todo compacto $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Exercício 58 (D)

Mostrar que toda função convexa própria definida em um espaço vetorial topológico separado de dimensão finita é contínua no interior do seu domínio efetivo.

Exercício 59 (F)

Sejam $f(x) = x^{1/3}$ e $g(x) = x^{1/4}$ em $[0,1]$, com $p = 4$.

(i) Determinar q tal que $f \in L^p$ e $g \in L^q$.

(ii) Aplicar e verificar a desigualdade de Hölder.

Exercício 60 (F)

Sejam $f = \chi_{[0,1]}$, $g = \chi_{[1,2]}$ e considere-se a medida de Lebesgue.

(i) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fg\,dx$.

(ii) Escolher p e q conjugados e calcular $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$.

(iii) Verificar a desigualdade de Hölder.

Exercício 61 (F)

(i) Se $f, g \in L^3(\Omega, \mu)$, mostrar que $f^2 g$ é integrável.

(ii) Se $f, g \in L^r(\Omega, \mu)$, determinar $r > 0$ para que $f^2 g^2$ seja integrável.

Exercício 62 (M)

Sejam $p, q, r \geq 1$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Se $f \in L^p(\Omega, \mu)$ e $g \in L^q(\Omega, \mu)$, demonstrar que $fg \in L^r(\Omega, \mu)$ e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Exercício 63 (M)

Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 < p < \infty$.

(i) Mostrar que

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

está bem definida.

(ii) Mostrar que

$$F(x) = \mathcal{O}\left(x^{(p-1)/p}\right).$$

(iii) Mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$\left(\int_a^\infty |f|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

(iv) Deduzir que

$$F(x) = o\left(x^{(p-1)/p}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Exercício 64 (F)

Seja $p \in [1, +\infty]$ e $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. Mostrar que

$$\max(|f|, |g|) \in L^p(\Omega, \mu).$$

Exercício 65 (D)

Seja dt a medida de Lebesgue em $[0, 1]$ e $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para todo $p \in]1, \infty]$, considere a aplicação

$$\varphi : L^p([0,1], dt) \longrightarrow K, \qquad \varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\, dt.$$

1. Dizer, justificando, se φ é uma forma linear contínua. Em caso afirmativo, calcular a sua norma.
2. Faz sentido definir uma forma linear $u(f) = f(0)$ em $L^p(\mathbb{R})$? Em caso afirmativo, dizer se é contínua e calcular a sua norma.

Exercício 66 (F)

Dar um exemplo de uma sucessão limitada em $L^1(\mathbb{R})$ que converge pontualmente para 0, mas não converge em norma de L^1.

Exercício 67 (M)

Seja $f \in L^1(\Omega, \mu)$ e $(f_n) \subset L^1(\Omega, \mu)$ uma sucessão de funções positivas tal que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{q.t.p.}, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Mostrar que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{em } L^1(\Omega, \mu).$$

Dica: utilizar a identidade $|f_n - f| = f_n + f - 2\min(f_n, f)$.

Exercício 68 (D)

Seja f uma forma linear em $L^2(]0, 1[)$ tal que

$$u \geq 0 \Longrightarrow f(u) \geq 0.$$

Provar, por contradição, que f é contínua para a norma $\|\cdot\|_2$ e mostrar que não é necessariamente contínua para a norma $\|\cdot\|_1$.

O resultado seguinte caracteriza os espaços normados cuja norma é induzida por um produto interno.

Teorema (Jordan–von Neumann)**.** *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A norma é induzida por um produto interno se e só se satisfaz a identidade do paralelogramo:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Nesse caso, o produto interno é dado por

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Exercício 69 (F)

Dar um exemplo de uma norma que não satisfaz a identidade do paralelogramo.

Exercício 70 (M)

Demonstrar que

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

define um produto interno.
Dica: verificar primeiro a linearidade provando que $(f+g|h) + (f-g|h) = 2(f|h)$.

Exercício 71 (M)

(i) Encontrar uma função definida em $(0,1)$ que pertença a $\mathcal{L}^3(0,1)$, mas não pertença a $\mathcal{L}^4(0,1)$.
(ii) Encontrar uma função definida em $(1,\infty)$ que pertença a $\mathcal{L}^3(1,\infty)$, mas não pertença a $\mathcal{L}^2(1,\infty)$.

Nota histórica

Os espaços L^p surgiram na sucessão da teoria da integração de Lebesgue e dos trabalhos de Frigyes Riesz no início do século XX. As desigualdades de Hölder e de Minkowski constituem os principais instrumentos da teoria destes espaços. Em 1935, Jordan e von Neumann caracterizaram as normas induzidas por um produto interno através da identidade do paralelogramo. Mais tarde, Hanner mostrou que os espaços L^p são uniformemente convexos para $1 < p < \infty$, resultado que desempenha um papel importante na sua geometria e implica, em particular, a sua reflexividade.

Nota bibliográfica

A apresentação deste capítulo segue, em larga medida, *Functional Analysis: Fundamentals and Applications*, de Michel Willem [76]. Exposições clássicas da teoria dos espaços L^p encontram-se igualmente em *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de Haim Brezis [12], em *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31], e em *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*, de Irene Fonseca e Giovanni Leoni [32].

8.2 Convergência e completude dos espaços normados L^p

Nesta secção estudamos a estrutura dos espaços $L^p(\Omega,\mu)$ enquanto espaços normados. Introduzimos a noção de convergência em norma, estabelecemos um critério útil de convergência e demonstramos, por meio do teorema de Fischer–Riesz, que os espaços $L^p(\Omega,\mu)$ são completos, constituindo assim exemplos fundamentais de espaços de Banach.

8.2.1 Definição e propriedades básicas

Definição 8.10 (Espaços L^p)**.** Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega, \mu)$ é definido como o quociente de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ pela relação de equivalência "igualdade quase em toda a parte". Para $u \in L^p(\Omega, \mu)$, define-se a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Quando μ é a medida de Lebesgue em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, escreve-se simplesmente $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, dx)$.

Nota 8.11. Na prática, identificam-se os elementos de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ com as suas classes de equivalência em $L^p(\Omega, \mu)$.

Nota 8.12. Ao longo deste capítulo, o expoente p será sempre um número real tal que $1 \leq p < \infty$.

8.2.2 Estrutura normada

Proposição 8.13. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega, \mu)$, munido da norma $\| \cdot \|_p$, é um espaço normado.*

Demonstração. A desigualdade de Minkowski garante que

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p, \qquad \forall\, u, v \in L^p(\Omega, \mu).$$

Além disso,

$$\|\lambda u\|_p = |\lambda| \, \|u\|_p, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, $\|u\|_p = 0$ se e somente se $u = 0$ quase em toda a parte, isto é, $u = 0$ em $L^p(\Omega, \mu)$. □

Proposição 8.14 ($L^q \subset L^p$ se $p < q$ e $\mu(\Omega) < \infty$)**.** *Sejam $1 \leq p < q < \infty$. Então*

$$L^q(\Omega, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu),$$

e, para todo $u \in L^q(\Omega, \mu)$,

$$\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q.$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Hölder às funções $|u|^p$ e 1, com expoentes conjugados $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$, obtém-se

$$\int_\Omega |u|^p \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |u|^q \, d\mu \right)^{p/q} \mu(\Omega)^{(q-p)/q}.$$

Elevando ambos os membros à potência $1/p$, conclui-se que $\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q$. □

8.2.3 Convergência em L^p

Definição 8.15 (Convergência em L^p)**.** Seja $1 \leq p < \infty$. Diz-se que uma sucessão $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$ converge para $u \in L^p(\Omega, \mu)$ em L^p se

$$\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega |u_n - u|^p \, d\mu \longrightarrow 0.$$

Escrevemos, neste caso,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega, \mu).$$

Exercício 72 (F)

Mostrar que a norma de $L^p(\Omega, \mu)$ é contínua relativamente à convergência em L^p.

Nota 8.16. A convergência em L^p é uma convergência em norma e, em geral, não implica convergência ponto a ponto.

Proposição 8.17 (Condição de convergência)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$. Se*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{q.t.p.} \qquad e \qquad \|u_n\|_p \longrightarrow \|u\|_p,$$

então

$$\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Como $|u_n - u|^p \leq 2^p\big(|u_n|^p + |u|^p\big)$ q.t.p., segue que $0 \leq 2^p\big(|u_n|^p + |u|^p\big) - |u_n - u|^p$. Pelo Lema de Fatou,

$$2^{p+1} \int_\Omega |u|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(2^p(|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p\Big) \, d\mu.$$

Como $\|u_n\|_p \longrightarrow \|u\|_p$, obtemos

$$2^{p+1} \int_\Omega |u|^p \, d\mu \leq 2^{p+1} \int_\Omega |u|^p \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u|^p \, d\mu.$$

Logo, $\limsup_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p^p \leq 0$, e, como a norma é não negativa, $\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0$. □

8.2.4 Completude de L^p

Teorema 8.18 (Fischer–Riesz)**.** *Para todo $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega, \mu)$ é completo.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão de Cauchy em $L^p(\Omega, \mu)$. Existe uma subsucessão $v_j = u_{n_j}$ tal que

$$\|v_{j+1} - v_j\|_p \leq 2^{-j}, \qquad j \geq 1.$$

Definamos $f_k := \sum_{j=1}^{k} |v_{j+1} - v_j|$. Pela desigualdade de Minkowski,

$$\|f_k\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{k} |v_{j+1} - v_j| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \|v_{j+1} - v_j\|_p < 1.$$

Pelo teorema de Levi,

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{q.t.p.},$$

para alguma função $f \in L^p(\Omega, \mu)$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_{j+1} - v_j| < \infty \quad \text{q.t.p.},$$

pelo que a série $\sum_{j=1}^{\infty}(v_{j+1} - v_j)$ converge absolutamente quase em toda a parte. Consequentemente, existe $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ tal que

$$v_j \longrightarrow u \quad \text{q.t.p.}$$

Além disso, para $m \geq k + 1$,

$$\|v_m - v_k\|_p \leq \sum_{j=k}^{m-1} 2^{-j} \leq \frac{2}{2^k}.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\|u - v_k\|_p \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m - v_k\|_p \leq \frac{2}{2^k},$$

logo $\|u - v_k\|_p \longrightarrow 0$. Como (u_n) é de Cauchy, $\|u - u_n\|_p \leq \|u - v_k\|_p + \|v_k - u_n\|_p$. Fixando k suficientemente grande e fazendo depois $n \to \infty$, conclui-se que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega, \mu).$$

Assim, $L^p(\Omega, \mu)$ é completo. □

8.2.5 Convergência em L^p e convergência quase em toda a parte

Proposição 8.19 (Convergência quase em toda a parte de uma subsucessão)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e suponhamos que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{em } L^p(\Omega, \mu).$$

Então existe uma subsucessão $v_j = u_{n_j}$ e uma função $g \in L^p(\Omega, \mu)$ tais que

$$|v_j| \leq g \quad \textit{q.t.p.}, \qquad \textit{e} \qquad v_j \longrightarrow u \quad \textit{q.t.p.}$$

Demonstração. Como $u_n \to u$ em $L^p(\Omega, \mu)$, a sucessão (u_n) é de Cauchy. Pela demonstração do teorema de Fischer–Riesz, existe uma subsucessão (v_j) que converge para u quase em toda a parte. Além disso,

$$|v_j| \leq |v_1| + \sum_{k=1}^{j-1} |v_{k+1} - v_k|.$$

Passando ao limite,

$$|v_j| \leq |v_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| =: g.$$

A prova do teorema de Fischer–Riesz mostra que $g \in L^p(\Omega, \mu)$, concluindo a demonstração. □

8.2.6 Convergência em L^p e passagem ao limite na integral

Uma questão natural consiste em saber se a convergência em L^p permite passar ao limite sob o sinal de integração.

Teorema 8.20. *Seja $1 \leq p < \infty$ e suponhamos que $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega, \mu)$. Então*

$$\int_\Omega u_n \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega u \, d\mu$$

sempre que $p = 1$ ou $\mu(\Omega) < \infty$.

Demonstração. Se $p = 1$,

$$\left| \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |u_n - u| \, d\mu = \|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0.$$

Suponhamos agora $1 < p < \infty$ e $\mu(\Omega) < \infty$. Seja q o expoente conjugado de p. Pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_\Omega (u_n - u) \, d\mu \right| \leq \|u_n - u\|_p \, \|1\|_q = \mu(\Omega)^{1/q} \|u_n - u\|_p,$$

pelo que o segundo membro converge para zero. □

Nota 8.21. A hipótese $\mu(\Omega) < \infty$ é indispensável quando $p > 1$, pois, nesse caso, a função constante 1 pertence a $L^q(\Omega, \mu)$ se e somente se $\mu(\Omega) < \infty$.

8.3 Densidade e separabilidade em L^p

Nesta secção estabelecemos a densidade das funções elementares em $L^p(\Omega, \mu)$. A demonstração baseia-se numa construção de partições da unidade, que permite igualmente obter uma aproximação uniforme de funções contínuas.

8.3.1 Construção de uma partição da unidade

Definamos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(t) = (1 - |t|)^+$, onde

$$(x)^+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Observemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x-k) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De facto, se $x \notin \mathbb{Z}$, apenas dois termos da soma são não nulos, nomeadamente $f(x-k_0)$ e $f(x-k_0-1)$, cuja soma é igual a 1.

Definição 8.22 (Partição da unidade)**.** Para $j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}^N$, definimos

$$f_{j,k}(x) = \prod_{n=1}^{N} f(2^j x_n - k_n).$$

Então:

1. $f_{j,k} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$;
2. $$\operatorname{spt} f_{j,k} = \overline{B_\infty}\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right);$$
3. $$\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} f_{j,k} = 1;$$
4. $$f_{j,k} \geq 0.$$

8.3.2 Bases numeráveis em $\mathcal{C}_0(\Omega)$

Recordemos que $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$.

Proposição 8.23 (Base numerável em $\mathcal{C}_c(\Omega)$ e $\mathcal{C}_0(\Omega)$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Então*

$$u_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} u\left(\frac{k}{2^j}\right) f_{j,k}$$

converge uniformemente para u em Ω. Por densidade, a mesma conclusão vale para $u \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de u, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x-y|_\infty \leq 2^{-m} \Longrightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon.$$

Logo, para $j \geq m$,

$$|u(x) - u_j(x)| = \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \big(u(x) - u(k/2^j)\big) f_{j,k}(x) \right| \leq \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} f_{j,k}(x) = \varepsilon.$$

Assim, $u_j \to u$ uniformemente em Ω. □

8.3.3 Densidade de $\mathcal{L}$ em L^p

Teorema 8.24 (Densidade de $\mathcal{L}$ em L^p)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e suponhamos que $\mathcal{L} \subset L^p(\Omega, \mu)$. Então $\mathcal{L}$ é denso em $L^p(\Omega, \mu)$.*

Demonstração. Seja $u \in L^p(\Omega, \mu)$. Como u é mensurável, existe uma sucessão $(u_n) \subset \mathcal{L}$ tal que $u_n \to u$ quase em toda a parte. Definamos

$$v_n := \max\big(\min(|u_n|, u), -|u_n|\big).$$

Por definição, $|v_n| \leq |u_n|$. De facto,

- Se $v_n = \min(|u_n|, u)$, então $|v_n| \leq |u_n|$.
- Se $v_n = -|u_n|$, então $|v_n| = |u_n| \leq |u|$.

Logo, $|v_n - u| \leq 2|u|$ quase em toda a parte, pelo que

$$|v_n - u|^p \leq 2^p |u|^p \in L^1(\Omega, \mu).$$

Além disso, $v_n \to u$ quase em toda a parte. Pelo teorema da convergência dominada,

$$\|v_n - u\|_p \longrightarrow 0.$$

Definamos $V = \{v \in L^p(\Omega, \mu) : \exists\, f \in \mathcal{L},\ |v| \leq f \text{ q.t.p.}\}$. Acabamos de mostrar que V é denso em $L^p(\Omega, \mu)$. Para concluir, basta provar que $\mathcal{L}$ é denso em V. Seja $u \in V$ e $f \in \mathcal{L}$ tal que $|u| \leq f$. Tomemos $(u_n) \subset \mathcal{L}$ com $u_n \to u$ quase em toda a parte e definamos

$$w_n := \max(\min(f, u_n), -f).$$

Então $w_n \in \mathcal{L}$ e

$$|w_n - u|^p \leq 2^p f^p \in L^1(\Omega, \mu),$$

enquanto $|w_n - u|^p \longrightarrow 0$ quase em toda a parte. Pelo teorema da convergência dominada, $\|w_n - u\|_p \longrightarrow 0$. Concluímos que $\mathcal{L}$ é denso em $L^p(\Omega, \mu)$. □

8.4 Separabilidade de $L^p(\Omega)$

A densidade das funções contínuas com suporte compacto permite agora construir um subconjunto denso e numerável de $L^p(\Omega)$.

Definição 8.25 (Separabilidade)**.** Um espaço métrico diz-se *separável* se contém um subconjunto denso e numerável.

Teorema 8.26 (Separabilidade de $L^p(\Omega)$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 \leq p < \infty$. Então $L^p(\Omega, dx)$ é separável.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, $\mathcal{C}_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Consideremos a família numerável

$$\mathcal{F} := \big\{ f_{j,k}|_\Omega : j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^N \big\}.$$

Mostremos que o espaço vetorial gerado por $\mathcal{F}$ é denso em $\mathcal{C}_c(\Omega)$ relativamente à norma de $L^p(\Omega)$. Seja $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Prolongando u por zero fora de Ω, obtemos uma função de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Pela proposição anterior,

$$u_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} u\left(\frac{k}{2^j}\right) f_{j,k}$$

converge uniformemente para u em $\mathbb{R}^N$. Para cada j, a soma anterior é finita, pois $u(k/2^j) \neq 0$ apenas para um número finito de índices $k \in \mathbb{Z}^N$. Além disso, a partir de certo índice, os suportes das funções u_j estão contidos num mesmo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$. Consequentemente,

$$\|u_j - u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |K|\,\|u_j - u\|^p_\infty \longrightarrow 0.$$

Assim, o espaço vetorial gerado por $\mathcal{F}$ é denso em $\mathcal{C}_c(\Omega)$ e, portanto, em $L^p(\Omega)$. Consideremos agora o conjunto

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{\ell=1}^{m} q_\ell f_{j_\ell,k_\ell}|_\Omega : m \in \mathbb{N},\ q_\ell \in \mathbb{Q},\ j_\ell \in \mathbb{N},\ k_\ell \in \mathbb{Z}^N \right\}.$$

Como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^N$ são numeráveis, $\mathcal{D}$ é numerável. Por outro lado, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, toda combinação linear finita de elementos de $\mathcal{F}$, com coeficientes reais, pode ser aproximada em $L^p(\Omega)$ por combinações lineares com coeficientes racionais. Logo, $\mathcal{D}$ é denso em $L^p(\Omega)$. Concluímos que $L^p(\Omega)$ é separável. □

Nota histórica

A separabilidade dos espaços L^p, para $1 \leq p < \infty$, foi estabelecida por Frigyes Riesz no contexto do desenvolvimento da teoria da integração de Lebesgue. A construção de subconjuntos densos por meio de funções contínuas ou de funções em escada tornou-se um instrumento fundamental da Análise Funcional. Em contraste, o espaço $L^\infty(\Omega)$ não é, em geral, separável.

Exercício 73 (F)

O conjunto das *funções em escada*, isto é, das combinações lineares finitas de funções indicadoras de retângulos, ou de cubos, é denso em $\mathcal{C}_c(\Omega)$ relativamente à norma de L^p, para $1 \leq p < \infty$. Demonstrar esta afirmação e deduzir que as funções em escada são densas em $L^p(\Omega)$.

Exercício 74 (M)

Considere $\Omega = [0,1]$ e $f \in L^p([0,1])$, com $1 \leq p < \infty$. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função em escada s tal que

$$\|f - s\|_p < \varepsilon$$

e todos os valores de s são racionais.
Dica: combine truncamento, aproximação por funções em escada e aproximação de números reais por números racionais.

Exercício 75 (M)

Seja $f \in L^1([0,1])$ não negativa. Construa uma sucessão (s_n) de funções em escada não negativas tal que

$$s_n \longrightarrow f \quad \text{em } L^1([0,1]).$$

Dica: use truncamento e subdivisões do intervalo.

Exercício 76 (M)

Seja $1 \leq q < \infty$ e $x_0 \in (0,1)$. Demonstrar que o conjunto

$$\{f \in L^q(0,1) : f = 0 \text{ numa vizinhança de } x_0\}$$

é denso em $L^q(0,1)$.

Capítulo 9

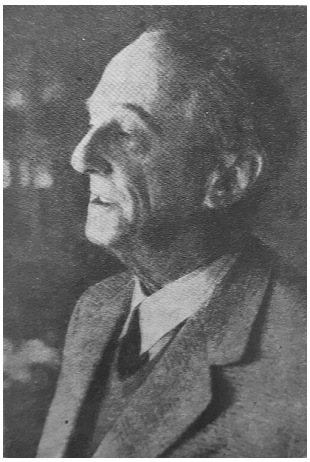
Teoremas Fundamentais da Análise Funcional

Neste capítulo apresentamos três dos resultados mais importantes da Análise Funcional: os teoremas de Banach–Steinhaus, de Milman e de Hahn–Banach. Estes resultados desempenham um papel fundamental no estudo dos operadores lineares contínuos, da geometria dos espaços de Banach e da teoria da dualidade. Em particular, permitem controlar famílias de operadores, compreender a estrutura dos espaços reflexivos e construir funcionais lineares contínuos com propriedades prescritas.

9.1 Teorema de Banach–Steinhaus

O teorema de Banach–Steinhaus, também conhecido por *Princípio da Limitação Uniforme*, constitui um dos resultados fundamentais da Análise Funcional. A sua importância reside no facto de permitir deduzir uma estimativa uniforme das normas de uma família de operadores lineares contínuos a partir de uma hipótese de limitação apenas pontual.

Stefan Banach
(1892–1945)



Hugo Steinhaus
(1887–1972)

Teorema 9.1 (Banach–Steinhaus)**.** *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tal que, para todo $u \in X$,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n u\|_Y < \infty.$$

Então,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

A demonstração elementar apresentada a seguir, que não recorre ao teorema da categoria de Baire, é devida a Alan D. Sokal [71]. O argumento baseia-se no seguinte lema.

Lema. Seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $r > 0$,

$$\sup_{z\in B(x,r)} \|Tz\|_Y \geq r\,\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Demonstração do lema. Para todo $\xi \in B(0,r)$,

$$\max\{\|T(x+\xi)\|_Y, \|T(x-\xi)\|_Y\} \geq \frac{1}{2}\big(\|T(x+\xi)\|_Y + \|T(x-\xi)\|_Y\big) \geq \|T\xi\|_Y,$$

pela desigualdade triangular. Tomando o supremo em $\xi \in B(0,r)$, obtemos

$$\sup_{z\in B(x,r)} \|Tz\|_Y \geq \sup_{\xi\in B(0,r)} \|T\xi\|_Y = r\,\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

□

Demonstração. Provaremos a contra-recíproca. Suponhamos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \infty.$$

Extraindo uma subsucessão, que continuamos a denotar por (A_n), podemos supor que

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq 4^{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Construiremos agora, por indução, uma sucessão $(x_n) \subset X$ tal que $\|x_n - x_{n-1}\|_X \leq 3^{-n}$, e

$$\|A_n x_n\|_Y \geq \frac{2}{3}\,3^{-n}\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}, \qquad n \geq 1.$$

Começamos por escolher arbitrariamente $x_0 \in X$. Supondo x_{n-1} já construído, aplicamos o lema ao operador A_n, ao ponto x_{n-1} e ao raio 3^{-n}. Obtemos um ponto $x_n \in B(x_{n-1}, 3^{-n})$ tal que

$$\|A_n x_n\|_Y \geq \frac{2}{3}\,3^{-n}\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} < \infty$, a sucessão (x_n) é de Cauchy. Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Além disso, para todo n,

$$\|x - x_n\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{2}\,3^{-n}.$$

Pela continuidade de A_n,

$$\|A_n x\|_Y \geq \|A_n x_n\|_Y - \|A_n(x - x_n)\|_Y$$

e, portanto,

$$\|A_n x\|_Y \geq \frac{2}{3}\,3^{-n}\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \frac{1}{2}\,3^{-n}\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \frac{1}{6}\,3^{-n}\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Finalmente,

$$\|A_n x\|_Y \geq \frac{1}{6}\,3^{-n}4^{\,n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n} \longrightarrow +\infty.$$

Concluímos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y = \infty$, o que demonstra a contra-recíproca e, consequentemente, o teorema. □

9.2 Convexidade uniforme e reflexividade

A noção de convexidade uniforme foi introduzida por James A. Clarkson em 1936 e desempenha um papel central na geometria dos espaços de Banach. Trata-se de uma propriedade quantitativa da convexidade que exclui a existência de segmentos quase lineares na esfera unidade. Uma das suas consequências mais profundas é o teorema de Milman, segundo o qual todo o espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

Definição 9.2 (Convexidade uniforme)**.** Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ diz-se *uniformemente convexo* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $u, v \in X$ com

$$\|u\| \leq 1, \qquad \|v\| \leq 1, \qquad \|u - v\| \geq \varepsilon,$$

tem-se

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

A constante δ depende apenas de ε e não dos vetores considerados. Geometricamente, isto significa que o ponto médio de dois pontos suficientemente afastados da esfera unidade permanece uniformemente afastado da fronteira da bola unidade.

Proposição 9.3. *Um espaço normado X é uniformemente convexo se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|u\| = \|v\| = 1 \quad e \quad \|u - v\| \geq \varepsilon$$

implicam

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Demonstração. A definição implica imediatamente esta condição. Reciprocamente, suponhamos que ela vale para vetores da esfera unidade e sejam $\|u\| \leq 1$ e $\|v\| \leq 1$. Se $\|u\| < 1-\delta$ ou $\|v\| < 1-\delta$, a desigualdade é imediata. Caso contrário, escrevendo $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$, $\tilde{v} = \frac{v}{\|}v\|$, e aplicando a hipótese aos vetores normalizados, obtém-se a definição geral por um argumento elementar de homogeneidade. □

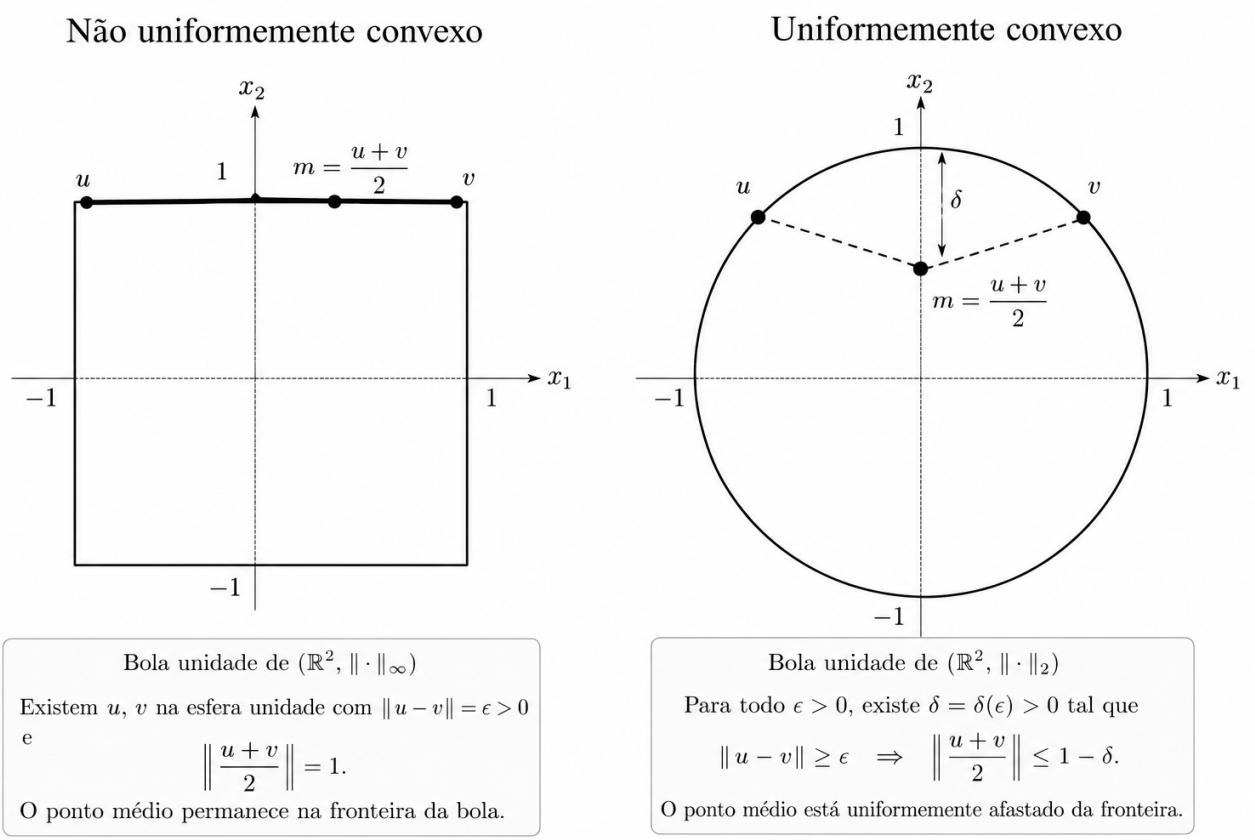


Figura 9.1: À esquerda: um espaço não uniformemente convexo, onde o ponto médio pode permanecer na fronteira da bola unidade. À direita: num espaço uniformemente convexo, o ponto médio encontra-se sempre a uma distância pelo menos δ da fronteira.

Definição 9.4 (Espaço reflexivo)**.** Seja X um espaço vetorial normado. Considera-se a aplicação canónica

$$J : X \to X'', \qquad J(x)(\varphi) = \varphi(x), \qquad \forall\, \varphi \in X'.$$

Dizemos que X é *reflexivo* se J é sobrejetiva, isto é,

$$J(X) = X''.$$

Neste caso, escrevemos

$$X \cong X''.$$

Nota 9.5. A aplicação J é sempre linear, isométrica e injetiva. Assim, X é reflexivo se, e somente se, J é um isomorfismo isométrico entre X e X''.

Teorema 9.6 (Milman)**.** *Todo o espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração. A demonstração completa deste resultado é bastante técnica e ultrapassa

o âmbito deste livro. Baseia-se na compacidade fraca da bola unidade e na geometria dos espaços uniformemente convexos. A ideia essencial consiste em mostrar que a convexidade uniforme impede a existência de funcionais que não atinjam a sua norma na bola unidade. Em consequência, a bola unidade é fracamente compacta e, pelo teorema de Kakutani, o espaço é reflexivo. □

A recíproca é falsa: existem espaços de Banach reflexivos que não são uniformemente convexos. No entanto, um importante resultado de Enflo afirma que todo o espaço de Banach reflexivo admite uma norma equivalente uniformemente convexa. O exemplo mais importante é fornecido pelos espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema 9.7 (Clarkson)**.** *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $1 < p < \infty$, então o espaço $L^p(\Omega, \mu)$ é uniformemente convexo.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $L^p(\Omega, \mu)$ não seja uniformemente convexo. Então existem $\varepsilon > 0$ e sucessões (u_n) e (v_n) em $L^p(\Omega, \mu)$ tais que

$$\|u_n\|_p = \|v_n\|_p = 1, \qquad \|u_n - v_n\|_p \geq \varepsilon, \qquad \left\| \frac{u_n + v_n}{2} \right\|_p \longrightarrow 1.$$

Extraindo uma subsucessão, podemos supor que

$$\|u_n - v_n\|_p \longrightarrow \eta$$

para algum $\eta \geq \varepsilon > 0$.

Caso $2 \leq p < \infty$. Pela desigualdade de Hanner,

$$\|u_n + v_n\|_p^p + \|u_n - v_n\|_p^p \leq \big(\|u_n\|_p + \|v_n\|_p\big)^p + \big|\|u_n\|_p - \|v_n\|_p\big|^p = 2^p.$$

Passando ao limite, obtemos $2^p + \eta^p \leq 2^p$, o que é impossível, pois $\eta > 0$.

Caso $1 < p \leq 2$. Definamos $a_n = \frac{u_n + v_n}{2}$, $b_n = \frac{u_n - v_n}{2}$. Temos $a_n + b_n = u_n$, $a_n - b_n = v_n$. Como, neste caso, a desigualdade de Hanner se inverte,

$$\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_p^p \geq \big(\|a_n\|_p + \|b_n\|_p\big)^p + \big|\|a_n\|_p - \|b_n\|_p\big|^p.$$

Portanto,

$$2 \geq \left(\left\| \frac{u_n + v_n}{2} \right\|_p + \left\| \frac{u_n - v_n}{2} \right\|_p \right)^p + \left| \left\| \frac{u_n + v_n}{2} \right\|_p - \left\| \frac{u_n - v_n}{2} \right\|_p \right|^p.$$

Passando ao limite, obtemos $2 \geq \big(1 + \frac{\eta}{2}\big)^p + \big|1 - \frac{\eta}{2}\big|^p$. Ora, como $\eta > 0$,

$$\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^p + \left|1 - \frac{\eta}{2}\right|^p > 2,$$

por estrita convexidade da função $t \mapsto |t|^p$. Chegamos novamente a uma contradição. Concluímos que $L^p(\Omega, \mu)$ é uniformemente convexo. □

Este resultado constitui uma das aplicações mais importantes das desigualdades de Clarkson e implica imediatamente que os espaços $L^p(\Omega,\mu)$, para $1<p<\infty$, são reflexivos. As demonstrações distinguem os casos $1<p\leq 2$ e $2\leq p<\infty$, utilizando as desigualdades de Clarkson. Estas desigualdades constituem uma das aplicações mais importantes da convexidade das funções $t\longmapsto |t|^p$. Como consequência imediata do teorema de Milman, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 9.8. *Se $1<p<\infty$, então o espaço $L^p(\Omega,\mu)$ é reflexivo.*

Demonstração. Pelo teorema de Clarkson, $L^p(\Omega,\mu)$ é uniformemente convexo. O resultado segue imediatamente do teorema de Milman. □

A hipótese $1<p<\infty$ é essencial. Com efeito, os espaços $L^1(\Omega,\mu)$ e $L^\infty(\Omega,\mu)$ não são, em geral, reflexivos.

Exercício 77 (M)

(i) Demonstrar a seguinte caracterização da convexidade uniforme: um espaço normado X é uniformemente convexo se, e somente se, para todas as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\|x_n\|,\ \|y_n\|\leq 1, \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

tem-se

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|\longrightarrow 1 \quad\Longrightarrow\quad \|x_n-y_n\|\longrightarrow 0.$$

(ii) Seja X um espaço uniformemente convexo. Mostrar que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ satisfaz

$$\|x_n\|\leq 1, \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

e

$$\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\longrightarrow 1, \qquad n,m\to\infty,$$

então (x_n) é uma sucessão de Cauchy.

9.3 Teorema de Hahn–Banach

O teorema de Hahn–Banach é um dos resultados fundamentais da Análise Funcional. Entre as suas numerosas aplicações encontram-se os teoremas de separação de conjuntos convexos, a existência de funcionais de suporte e o estudo da dualidade dos espaços normados.

Teorema 9.9 (Forma geométrica)**.** *Seja E um espaço normado real separável e sejam $A,B\subset E$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos, com A fechado e B compacto. Então existe $f\in E'$, $f\neq 0$, e $\alpha\in\mathbb{R}$ tais que*

$$\langle f,a\rangle<\alpha<\langle f,b\rangle, \qquad \forall\, a\in A,\ b\in B.$$

Hans Hahn
(1879–1934)

Stefan Banach
(1892–1945)

Corolário 9.10. *Seja E um espaço normado real separável. Se $F \subset E$ não é denso, então existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tal que*

$$f(x) = 0, \qquad \forall\, x \in F.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. Aplicamos o teorema de Hahn–Banach aos conjuntos

$$A = \overline{F}, \qquad B = \{x_0\}.$$

Como A é fechado, B é compacto e $A \cap B = \varnothing$, existe $f \in E'$, $f \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle, \qquad \forall\, x \in \overline{F}.$$

Em particular,

$$\langle f, x\rangle < \alpha, \qquad \forall\, x \in F.$$

Como F é um subespaço vetorial, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $\lambda x \in F$, pelo que

$$\lambda\langle f, x\rangle = \langle f, \lambda x\rangle < \alpha.$$

Se $\langle f, x\rangle \neq 0$, basta escolher $\lambda \to \pm\infty$ com o mesmo sinal de $\langle f, x\rangle$ para obter uma contradição. Logo,

$$\langle f, x\rangle = 0, \qquad \forall\, x \in F.$$

□

Corolário 9.11. *Seja E um espaço normado real separável. Para todo $x \in E$, existe $f \in E'$ tal que*

$$\|f\|_{E'} = \|x\|_E, \qquad f(x) = \|x\|_E^2.$$

Demonstração. Se $x = 0$, basta tomar $f = 0$. Suponhamos que $x \neq 0$ e, para cada $n \geq 2$, definamos

$$r_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x\|_E, \qquad A_n = \{y \in E : \|y\|_E \leq r_n\}.$$

O conjunto A_n é convexo e fechado, o conjunto $\{x\}$ é convexo e compacto, e $x \notin A_n$. Pela forma geométrica do teorema de Hahn–Banach, existem $h_n \in E' \setminus \{0\}$ e $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$h_n(y) < \alpha_n < h_n(x), \qquad \forall\, y \in A_n.$$

Como $A_n = r_n\, \overline{B}_E(0,1)$, temos

$$\sup_{y \in A_n} h_n(y) = r_n \sup_{\|u\|_E \leq 1} h_n(u) = r_n \|h_n\|_{E'}.$$

Com efeito, como a bola unidade é simétrica,

$$\sup_{\|u\|_E \leq 1} h_n(u) = \sup_{\|u\|_E \leq 1} |h_n(u)| = \|h_n\|_{E'}.$$

Consequentemente, $r_n \|h_n\|_{E'} \leq \alpha_n < h_n(x)$. Definindo $g_n = \frac{h_n}{\|h_n\|_{E'}}$, obtemos $\|g_n\|_{E'} = 1$ e, dividindo a desigualdade anterior por $\|h_n\|_{E'} > 0$, $r_n < g_n(x)$. Por outro lado, pela definição da norma dual, $g_n(x) \leq |g_n(x)| \leq \|g_n\|_{E'} \|x\|_E = \|x\|_E$. Assim,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x\|_E < g_n(x) \leq \|x\|_E,$$

e, portanto, $g_n(x) \longrightarrow \|x\|_E$. Seja $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão densa em E. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão real $(g_n(z_k))_n$ é limitada, pois

$$|g_n(z_k)| \leq \|g_n\|_{E'} \|z_k\|_E = \|z_k\|_E.$$

Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass, podemos extrair uma subsucessão $(g_n^{(1)})$ de (g_n) tal que $(g_n^{(1)}(z_1))_n$ converge. Da sucessão $(g_n^{(1)})$, extraímos uma subsucessão $(g_n^{(2)})$ tal que $(g_n^{(2)}(z_2))_n$ converge; como se trata de uma subsucessão de $(g_n^{(1)})$, a sucessão $(g_n^{(2)}(z_1))_n$ continua a convergir. Prosseguindo desta forma, construímos, para cada k, uma subsucessão $(g_n^{(k)})$ tal que

$$(g_n^{(k)}(z_i))_n \quad \text{converge para todo } i \leq k,$$

e tal que $(g_n^{(k+1)})$ é uma subsucessão de $(g_n^{(k)})$. Consideremos agora a subsucessão diagonal

$$g_{n_j} := g_j^{(j)}.$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, para todo $j \geq k$ o termo g_{n_j} pertence à subsucessão $(g_n^{(k)})$. Logo,

$$(g_{n_j}(z_k))_j$$

converge. Assim, a subsucessão diagonal converge pontualmente em todos os elementos da sucessão densa (z_k). Mostremos que ela converge pontualmente em todo E. Fixemos $y \in E$ e $\varepsilon > 0$. Pela densidade de (z_k), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - z_k\|_E < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $(g_{n_j}(z_k))_j$ converge, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_{n_j}(z_k) - g_{n_\ell}(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad j, \ell \geq J.$$

Então, para $j, \ell \geq J$,

$$\begin{aligned}|g_{n_j}(y) - g_{n_\ell}(y)| &\leq |g_{n_j}(y - z_k)| + |g_{n_j}(z_k) - g_{n_\ell}(z_k)| + |g_{n_\ell}(z_k - y)| \\ &\leq \|g_{n_j}\|_{E'}\|y - z_k\|_E + |g_{n_j}(z_k) - g_{n_\ell}(z_k)| + \|g_{n_\ell}\|_{E'}\|z_k - y\|_E \\ &\leq 2\|y - z_k\|_E + |g_{n_j}(z_k) - g_{n_\ell}(z_k)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $(g_{n_j}(y))_j$ é uma sucessão de Cauchy e, portanto, converge em $\mathbb{R}$. Podemos assim definir

$$g(y) = \lim_{j\to\infty} g_{n_j}(y), \qquad y \in E.$$

A aplicação g é linear, pois, para todos $y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(y + \lambda z) = \lim_{j\to\infty} g_{n_j}(y + \lambda z) = \lim_{j\to\infty} \big(g_{n_j}(y) + \lambda g_{n_j}(z)\big) = g(y) + \lambda g(z).$$

Além disso,

$$|g(y)| = \lim_{j\to\infty} |g_{n_j}(y)| \leq \|y\|_E, \qquad \forall\, y \in E.$$

Consequentemente, $g \in E'$ e $\|g\|_{E'} \leq 1$. Por outro lado,

$$g(x) = \lim_{j\to\infty} g_{n_j}(x) = \|x\|_E.$$

Como $x \neq 0$, segue que

$$\|g\|_{E'} \geq \frac{|g(x)|}{\|x\|_E} = 1.$$

Logo, $\|g\|_{E'} = 1$. Finalmente, tomando $f = \|x\|_E\, g$, obtemos $\|f\|_{E'} = \|x\|_E\|g\|_{E'} = \|x\|_E$ e

$$f(x) = \|x\|_E\, g(x) = \|x\|_E^2.$$

□

Nota 9.12. Em dimensão finita, a bola unidade fechada de E' é compacta, pelo que toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente. Em dimensão infinita, esta propriedade deixa de ser verdadeira em geral: a bola unidade já não é compacta para a norma.
A hipótese de separabilidade fornece, contudo, um substituto suficiente para o nosso propósito. Com efeito, basta controlar a convergência dos funcionais sobre uma sucessão densa $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como esta família é numerável, um argumento diagonal permite extrair uma única subsucessão que converge em todos os pontos z_k. A continuidade uniforme dos funcionais estende então essa convergência a todo o espaço.
É precisamente esta possibilidade de substituir um conjunto denso arbitrário por uma sucessão densa que torna a separabilidade uma hipótese essencial nesta demonstração.

Nota 9.13. A hipótese de separabilidade permite demonstrar a forma geométrica do teorema de Hahn–Banach sem recorrer ao axioma da escolha.

Nota 9.14. Nos capítulos seguintes aplicaremos estes resultados aos espaços $L^p(\Omega, \mu)$, com $1 < p < \infty$, os quais são separáveis quando (Ω, μ) é um espaço de medida σ-finito.

Nota histórica

Os resultados apresentados neste capítulo assinalam o nascimento da Análise Funcional moderna. Entre 1927 e 1932, Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Hans Hahn e outros membros da Escola de Lwów desenvolveram uma teoria abstrata dos espaços normados que unificou numerosos problemas provenientes da Análise, da Geometria e das Equações às Derivadas Parciais.

O Princípio da Limitação Uniforme revelou que propriedades verificadas ponto a ponto para famílias de operadores implicam automaticamente estimativas uniformes globais. Pouco depois, o Teorema de Hahn–Banach estabeleceu o princípio fundamental da extensão de funcionais lineares, abrindo caminho ao desenvolvimento da teoria da dualidade. Estes resultados permanecem hoje entre os instrumentos mais importantes da Análise Funcional.

Nota bibliográfica

As referências clássicas para este capítulo incluem *Théorie des opérations linéaires*, de Stefan Banach [5], *A Course in Functional Analysis*, de John B. Conway [19], *Functional Analysis*, de Walter Rudin [66], *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de Haim Brezis [12], e *An Introduction to Banach Space Theory*, de Robert E. Megginson [56]. Para uma perspetiva histórica sobre a Escola de Lwów, recomenda-se igualmente *Adventures of a Mathematician*, de Stanislaw Ulam [74].

Capítulo 10

Dualidade e aproximação nos espaços L^p

A noção de espaço dual ocupa um lugar central na Análise Funcional. Ela permite descrever todas as aplicações lineares contínuas definidas sobre um espaço normado e fornece uma poderosa ferramenta para estudar problemas de existência, aproximação, otimização e equações diferenciais. No caso dos espaços L^p, a teoria assume uma forma particularmente elegante. Quando $1 < p < \infty$, todo funcional linear contínuo pode ser representado por integração contra uma função pertencente ao espaço conjugado $L^{p'}$. Este resultado, conhecido como teorema de representação de Riesz–Fréchet, mostra que o dual de L^p pode ser identificado de maneira natural com $L^{p'}$.

Neste capítulo estudaremos esta representação, as propriedades do espaço L^∞ e algumas das suas consequências fundamentais, em particular a aproximação de funções de L^p por funções suaves através de molificadores.

10.1 Dualidade em espaços L^p

Seja $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ um espaço de medida e seja

$$1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

onde p' denota o expoente conjugado de p. Comecemos por observar que, para toda função $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$, a aplicação

$$G_g : L^p(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad G_g(v) = \int_\Omega g\, v \, d\mu,$$

define um funcional linear contínuo. Com efeito, pela desigualdade de Hölder,

$$|G_g(v)| = \left| \int_\Omega g\, v \, d\mu \right| \leq \|g\|_{L^{p'}} \, \|v\|_{L^p},$$

pelo que

$$\|G_g\|_{(L^p)'} \leq \|g\|_{L^{p'}}.$$

Nota 10.1. A construção anterior fornece uma aplicação linear contínua

$$L^{p'}(\Omega,\mu) \longrightarrow (L^p(\Omega,\mu))', \qquad g \longmapsto G_g,$$

onde

$$G_g(v) = \int_\Omega g\, v\, d\mu.$$

É natural perguntar se todo funcional linear contínuo sobre $L^p(\Omega,\mu)$ é obtido desta forma. O teorema seguinte mostra que, quando $1 < p < \infty$, esta aplicação é linear, bijetiva e isométrica. Consequentemente, o espaço dual $(L^p(\Omega,\mu))'$ pode ser identificado, de forma natural, com $L^{p'}(\Omega,\mu)$.

Teorema de representação de Riesz–Fréchet

O teorema seguinte responde à questão formulada na observação anterior.

Frigyes Riesz
(1880–1956)

Maurice Fréchet
(1878–1973)

Teorema 10.2 (Representação de Riesz–Fréchet)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e seja $G \in (L^p(\Omega,\mu))'$. Então existe um único $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$ tal que*

$$\langle G, v\rangle = \int_\Omega gv\, d\mu, \qquad \forall\, v \in L^p(\Omega,\mu).$$

Além disso,

$$\|G\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega,\mu)}.$$

Demonstração. Consideremos a aplicação linear

$$\mathcal{G} : L^{p'}(\Omega,\mu) \longrightarrow (L^p(\Omega,\mu))',$$

definida por

$$\langle \mathcal{G}u, v\rangle := \int_\Omega uv\, d\mu, \qquad \forall\, u \in L^{p'}(\Omega,\mu),\ \forall\, v \in L^p(\Omega,\mu).$$

A demonstração será feita em dois passos. Primeiro mostraremos que $\mathcal{G}$ é uma isometria; em seguida provaremos que é sobrejetiva.

Passo 1: $\mathcal{G}$ é uma isometria

Pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle \mathcal{G}u, v\rangle| \leq \|u\|_{L^{p'}} \|v\|_{L^p},$$

para todo $v \in L^p(\Omega,\mu)$. Portanto,

$$\|\mathcal{G}u\|_{(L^p)'} \leq \|u\|_{L^{p'}}.$$

Para obter a desigualdade inversa, consideremos $v_0 := |u|^{p'-2}u$. Então

$$v_0 \in L^p(\Omega,\mu), \qquad \|v_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^{p'}}^{p'-1},$$

e $\langle \mathcal{G}u, v_0\rangle = \|u\|_{L^{p'}}^{p'}$. Consequentemente,

$$\|\mathcal{G}u\|_{(L^p)'} \geq \frac{\langle \mathcal{G}u, v_0\rangle}{\|v_0\|_{L^p}} = \|u\|_{L^{p'}}.$$

Concluímos que

$$\|\mathcal{G}u\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}}.$$

Passo 2: $\mathcal{G}$ é sobrejetiva

Seja

$$E := \mathcal{G}(L^{p'}(\Omega,\mu)) \subset (L^p(\Omega,\mu))'.$$

Como $\mathcal{G}$ é uma isometria, o conjunto E é um subespaço fechado de $(L^p(\Omega,\mu))'$. Mostremos que E é denso. Seja

$$h \in (L^p(\Omega,\mu))''$$

tal que

$$\langle h, \mathcal{G}u\rangle = 0, \qquad \forall\, u \in L^{p'}(\Omega,\mu).$$

Pela reflexividade de $L^p(\Omega,\mu)$, identificamos $(L^p(\Omega,\mu))''$ com $L^p(\Omega,\mu)$. Assim,

$$\int_\Omega uh\, d\mu = 0, \qquad \forall\, u \in L^{p'}(\Omega,\mu).$$

Escolhendo $u = |h|^{p-2}h$, obtemos

$$\int_\Omega |h|^p\, d\mu = 0,$$

logo $h = 0$. Portanto, $E^\perp = \{0\}$, o que implica que E é denso em $(L^p(\Omega,\mu))'$. Como E é também fechado, concluímos que

$$E = (L^p(\Omega,\mu))'.$$

Assim, $\mathcal{G}$ é sobrejetiva e a demonstração está concluída. □

10.2 Espaço $L^\infty(\Omega,\mu)$

O caso $p = \infty$ apresenta características bastante distintas das dos espaços L^p, com $1 < p < \infty$. Embora $L^\infty(\Omega,\mu)$ seja um espaço de Banach, ele deixa de ser separável e reflexivo em geral. Além disso, o seu espaço dual é estritamente maior do que $L^1(\Omega,\mu)$, ao contrário do que acontece para $1 < p < \infty$.

Definição 10.3. O espaço $L^\infty(\Omega,\mu)$ é constituído pelas classes de equivalência das funções mensuráveis $f:\Omega\to\mathbb{R}$ que são essencialmente limitadas, isto é, para as quais existe $C\geq 0$ tal que

$$|f|\leq C \qquad \mu\text{-q.t.p. em } \Omega.$$

Define-se

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} := \inf\big\{C\geq 0 : |f|\leq C \ \mu\text{-q.t.p. em } \Omega\big\}.$$

Esta quantidade é denominada supremo essencial de $|f|$ e também se escreve

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Nota 10.4. O espaço $L^\infty(\Omega,\mu)$ apresenta várias diferenças importantes em relação aos espaços $L^p(\Omega,\mu)$, com $1\leq p<\infty$.

1. $L^\infty(\Omega,\mu)$ é um espaço de Banach.
2. Em geral, $L^\infty(\Omega,\mu)$ não é separável.
3. Em geral, $L^\infty(\Omega,\mu)$ não é reflexivo.
4. A aplicação
$$L^1(\Omega,\mu)\ni g\longmapsto \left(f\mapsto \int_\Omega fg\,d\mu\right)$$
identifica isometricamente $L^1(\Omega,\mu)$ com um subespaço de $(L^\infty(\Omega,\mu))'$. Contudo,
$$L^1(\Omega,\mu)\subsetneq (L^\infty(\Omega,\mu))',$$
isto é, existem funcionais lineares contínuos sobre $L^\infty(\Omega,\mu)$ que não são representáveis por integração contra uma função de $L^1(\Omega,\mu)$.
5. A noção natural de convergência em L^∞ é a convergência fraca-$*$:
$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \iff \int_\Omega u_n g\,d\mu \longrightarrow \int_\Omega ug\,d\mu, \qquad \forall\, g\in L^1(\Omega,\mu).$$

cccc

Propriedade	$\mathbf{1<p<\infty}$	$\boldsymbol{L^1}$	$\boldsymbol{L^\infty}$
Espaço de Banach	Sim	Sim	Sim
Separável	Sim	Sim	Não
Reflexivo	Sim	Não	Não
Uniformemente convexo	Sim	Não	Não
Espaço dual	$L^{p'}$	L^∞	$\supsetneq L^1$
Convergência natural	Fraca	Fraca	Fraca-$*$

Tabela 10.1: Principais propriedades dos espaços $L^p(\Omega,\mu)$.

Definição 10.5 (Continuidade absoluta)**.** Seja $(\Omega,\mathcal{L},\mu)$ um espaço de medida e seja $f\in L^1(\Omega,\mu)$. A medida

$$\nu(A):=\int_A f\,d\mu,\qquad A\in\mathcal{L},$$

é absolutamente contínua em relação a μ, isto é,

$$\mu(A)=0\quad\Longrightarrow\quad\nu(A)=0.$$

Equivalentemente, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\mu(A)<\delta\quad\Longrightarrow\quad\int_A|f|\,d\mu<\varepsilon.$$

Exercício 78 (M)

Seja $f\in L^q(0,1)$, com $1\le q<\infty$. Mostre que $|f|^q\in L^1(0,1)$ e que a aplicação

$$A\longmapsto\int_A|f(x)|^q\,dx,$$

definida sobre os conjuntos mensuráveis de $(0,1)$, é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Exercício 79 (M)

Seja $f\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Investigue se existe uma sucessão

$$(\varphi_n)\subset\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2}g(x)\varphi_n(x)\,dx\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^2}g(x)f(x)\,dx,\qquad\forall\,g\in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Exercício 80 (F)

Dê um exemplo de uma função que pertença a

$$\bigcap_{1<p<\infty}L^p(\mathbb{R}),$$

mas que não pertença a $L^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 81 (F)

Mostre, através de exemplos ou contraexemplos, que os espaços $L^p(\mathbb{R})$ e $L^q(\mathbb{R})$ não são comparáveis quando $p\neq q$.

Exercício 82 (M)

Determine para quais valores de $1 \leq p \leq \infty$ a função

$$f(x) = \frac{1}{|\ln x|}$$

pertence a $L^p((0,1))$.

Exercício 83 (D)

Mostre que o espaço dual de $L^\infty(0,1)$, denotado por $(L^\infty(0,1))'$, é estritamente maior do que $L^1(0,1)$, isto é,

$$L^1(0,1) \subsetneq (L^\infty(0,1))'.$$

Considere a inclusão canónica

$$L^1(0,1) \ni f \longmapsto \Lambda_f,$$

onde

$$\Lambda_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx, \qquad g \in L^\infty(0,1).$$

Sugestão. Fixe $x_0 \in (0,1)$, considere em $C([0,1])$ o funcional

$$T(\varphi) = \varphi(x_0),$$

e prolongue-o a $L^\infty(0,1)$ pelo teorema de extensão de Hahn–Banach. Para mostrar que o prolongamento não é representável por uma função de $L^1(0,1)$, utilize funções contínuas iguais a 1 em x_0, cujos suportes se concentram em torno desse ponto.

Nota 10.6. Esta aplicação utiliza o teorema de extensão de Hahn–Banach num espaço não separável e requer, portanto, uma forma do axioma da escolha mais forte do que as utilizadas nas construções sequenciais anteriores.

10.3 Continuidade das translações

Para demonstrar a aproximação por molificadores, necessitamos de um resultado fundamental sobre os espaços L^p.

Teorema 10.7 (Continuidade das translações)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$ e seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $h \in \mathbb{R}^n$, definamos*

$$\tau_h f(x) := f(x-h).$$

Então,

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Como $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$\|f-\varphi\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}$. Como φ é uniformemente contínua e tem suporte compacto,

$$\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p} \longrightarrow 0, \qquad h \to 0.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, como a translação preserva a norma em L^p,

$$\|\tau_h f - \tau_h\varphi\|_{L^p} = \|f-\varphi\|_{L^p}.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p} &\le \|\tau_h f - \tau_h\varphi\|_{L^p} + \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - f\|_{L^p} \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $|h| < \delta$. □

10.4 Aproximação por molificadores

Definição 10.8 (Molificador)**.** Uma função

$$\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

é denominada um *molificador* se

$$\rho \ge 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1.$$

Definição 10.9 (Família regularizada)**.** Para $\varepsilon > 0$, define-se

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \le p < \infty$, define-se a regularização de f por convolução,

$$f_\varepsilon = \rho_\varepsilon * f,$$

isto é,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\, f(x-y)\,dy.$$

Teorema 10.10. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \le p < \infty$. Então,*

$$f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\,\varepsilon > 0, \qquad e \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Como $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α temos

$$D^\alpha f_\varepsilon = D^\alpha(\rho_\varepsilon * f) = (D^\alpha\rho_\varepsilon) * f.$$

Com efeito, como $D^\alpha \rho_\varepsilon$ é limitada e tem suporte compacto, a função

$$y \longmapsto D^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) f(y)$$

é integrável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Podemos, portanto, derivar sob o sinal de integral e concluir que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostremos agora a convergência em L^p. Efetuando a mudança de variável $y = \varepsilon z$, obtemos

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) f(x - \varepsilon z)\, dz.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\, dz = 1$, segue que

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\big(f(x-\varepsilon z) - f(x)\big)\, dz.$$

Pela desigualdade integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \|f(\,\cdot - \varepsilon z) - f\|_{L^p}\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p}\, dz. \end{aligned}$$

Para cada $z \in \mathbb{R}^n$, a continuidade das translações em L^p fornece

$$\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Além disso,

$$\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p} \leq \|\tau_{\varepsilon z} f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} = 2\|f\|_{L^p}.$$

Consequentemente,

$$\rho(z)\|\tau_{\varepsilon z} f - f\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}\rho(z),$$

e a função do segundo membro pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema da convergência dominada, $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} = 0$. □

Nota 10.11. Este resultado mostra que as funções suaves são densas em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Esta propriedade deixa de ser verdadeira em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para a convergência na norma.

Exercício 84 (F)

Dê um contraexemplo que mostre que, em geral,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \not\longrightarrow 0,$$

quando $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nota histórica

A teoria da dualidade começou a tomar forma no início do século XX com os trabalhos de Fréchet, Fischer e Frigyes Riesz [64]. A ideia de representar funcionais lineares contínuos por integrais revelou uma ligação profunda entre a Teoria da Me-

dida e a Análise Funcional. A identificação do dual dos espaços L^p constituiu um dos resultados fundamentais desta teoria. Atualmente, a dualidade desempenha um papel central na Análise, na Probabilidade, nas Equações às Derivadas Parciais, no Cálculo das Variações e na Otimização.

Nota bibliográfica

Para o estudo da dualidade, recomendam-se *Real and Complex Analysis*, de Walter Rudin [68], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31], *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de Haim Brezis [12], *A Course in Functional Analysis*, de John B. Conway [19], *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, de Philippe G. Ciarlet [17], *Functional Analysis*, de Kôsaku Yosida [78], e *Linear Operators. Parte I: General Theory*, de Nelson Dunford e Jacob T. Schwartz [25].

Capítulo 11

Convergências fraca e fraca-*

11.1 Definições e propriedades

Definição 11.1 (Convergência fraca)**.** Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sucessão $(x_n) \subset X$ converge *fracamente* para $x \in X$ se

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, f \in X'.$$

Neste caso, escrevemos

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \text{em } X.$$

Definição 11.2 (Convergência fraca em L^p)**.** Seja $1 < p < \infty$. Como

$$(L^p(\Omega,\mu))' = L^{p'}(\Omega,\mu),$$

uma sucessão $(u_n) \subset L^p(\Omega,\mu)$ converge *fracamente* para $u \in L^p(\Omega,\mu)$ se, e somente se,

$$\int_\Omega u_n\, v\, d\mu \longrightarrow \int_\Omega u\, v\, d\mu, \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega,\mu).$$

Neste caso, escrevemos

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega,\mu).$$

Definição 11.3 (Convergência fraca no dual)**.** Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sucessão $(f_n) \subset X'$ converge *fracamente* para $f \in X'$ se

$$\Phi(f_n) \longrightarrow \Phi(f), \qquad \forall\, \Phi \in X''.$$

Neste caso, escrevemos

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{em } X'.$$

Definição 11.4 (Convergência fraca-*)**.** Seja X um espaço vetorial normado. Dize-

mos que uma sucessão $(f_n) \subset X'$ converge *fracamente-** para $f \in X'$ se

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Neste caso, escrevemos

$$f_n \rightharpoonup^* f \qquad \text{em } X'.$$

Proposição 11.5. *Seja X um espaço normado. Se*

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \textit{em } X',$$

então

$$f_n \rightharpoonup^* f \qquad \textit{em } X'.$$

Demonstração. Para cada $x \in X$, definamos

$$\widehat{x} : X' \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \widehat{x}(g) = g(x).$$

A aplicação $\widehat{x}$ é linear e contínua, logo $\widehat{x} \in X''$. Como $f_n \rightharpoonup f$ em X', segue da definição de convergência fraca que

$$\widehat{x}(f_n) \longrightarrow \widehat{x}(f), \qquad \forall\, x \in X.$$

Mas

$$\widehat{x}(f_n) = f_n(x) \quad \text{e} \quad \widehat{x}(f) = f(x).$$

Portanto,

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, x \in X,$$

isto é, $f_n \rightharpoonup^* f$. □

Proposição 11.6. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se*

$$f_n \rightharpoonup^* f \qquad \textit{em } X',$$

então

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \textit{em } X'.$$

Demonstração. Seja $\Phi \in X''$. Como X é reflexivo, a aplicação canónica

$$J : X \longrightarrow X'', \qquad J(x) = \widehat{x},$$

é sobrejetiva. Portanto, existe $x \in X$ tal que $\Phi = \widehat{x}$. Como $f_n \rightharpoonup^* f$ em X', temos

$$f_n(x) \longrightarrow f(x).$$

Por outro lado, $\Phi(f_n) = \widehat{x}(f_n) = f_n(x)$, e analogamente $\Phi(f) = f(x)$. Logo, $\Phi(f_n) \longrightarrow \Phi(f)$. Como $\Phi \in X''$ é arbitrário, concluímos que $f_n \rightharpoonup f \qquad \text{em } X'$. □

11.2 Exemplos de convergência fraca e fraca-*

Exemplo 11.7 (Espaços reflexivos)**.** Seja $1 < p < \infty$. Como $L^p(0,1)$ é reflexivo, as convergências fraca e fraca-* coincidem. Considere a sucessão

$$f_n(x) = \sin(2\pi n x), \qquad x \in (0,1).$$

Temos

$$f_n \in L^p(0,1), \qquad \|f_n\|_p \leq 1.$$

Além disso, pelo lema de Riemann–Lebesgue,

$$\int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx \longrightarrow 0, \qquad \forall\, g \in L^{p'}(0,1).$$

Logo,

$$f_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{em } L^p(0,1).$$

Como $L^p(0,1)$ é reflexivo, segue também que

$$f_n \rightharpoonup^* 0 \qquad \text{em } L^p(0,1).$$

Exercício 85 (M)

(Lema de Riemann–Lebesgue) Demonstrar que a sucessão

$$f_n(x) = \sin(2\pi n x)$$

converge fracamente para 0 em $L^p(0,1)$ para todo $1 < p < \infty$.

Exemplo 11.8 (Espaço não reflexivo)**.** O espaço $L^\infty(0,1)$ não é reflexivo. Mais precisamente,

$$L^\infty(0,1) = (L^1(0,1))',$$

mas

$$(L^\infty(0,1))' \neq L^1(0,1).$$

Considere a sucessão $f_n = \chi_{[0,1/n]}$. Temos $\|f_n\|_\infty = 1$, logo (f_n) é limitada em $L^\infty(0,1)$. Além disso, para todo $g \in L^1(0,1)$,

$$\int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^{1/n} g(x)\, dx \longrightarrow 0,$$

pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue. Consequentemente,

$$f_n \rightharpoonup^* 0 \qquad \text{em } L^\infty(0,1).$$

Este exemplo mostra que, em espaços não reflexivos, a convergência fraca-* é a noção natural de convergência no dual e não coincide, em geral, com a convergência fraca.

11.3 Convergência em subconjuntos densos

Denotemos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y.

Proposição 11.9 (Princípio da extensão por densidade)**.** *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $Z \subset X$ um subconjunto denso.*
Considere uma sucessão $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

(i)
$$\sup_n \|A_n\| < \infty;$$

(ii) para todo $v \in Z$, a sucessão $(A_n v)$ converge em Y.

Então existe um operador linear contínuo $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$A_n x \longrightarrow Ax, \qquad \forall\, x \in X,$$

e
$$\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Demonstração. Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como Z é denso em X, existe $z \in Z$ tal que $\|x - z\| < \varepsilon$. Como $(A_n z)$ converge, existe N tal que

$$\|A_j z - A_k z\| < \varepsilon, \qquad j,k \geq N.$$

Escrevendo $A_j x - A_k x = A_j(x-z) + (A_j z - A_k z) + A_k(z-x)$, obtemos

$$\|A_j x - A_k x\| \leq \|A_j\|\,\|x-z\| + \|A_j z - A_k z\| + \|A_k\|\,\|x-z\| \leq (2c+1)\varepsilon,$$

onde $c = \sup_n \|A_n\|$. Logo, $(A_n x)$ é de Cauchy em Y e, como Y é completo, converge. Definamos

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

A linearidade de A decorre da linearidade do limite e, para todo $x \in X$, $\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\|$. Daí, $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$, concluindo a demonstração. □

11.4 Teorema de Banach (Banach–Alaoglu sequencial)

Teorema 11.10 (Banach)**.** *Seja X um espaço normado separável. Então toda sucessão limitada de X' admite uma subsucessão que converge fracamente-*.*

Demonstração. Seja $(f_n) \subset X'$ uma sucessão limitada e seja $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um subconjunto denso e enumerável de X. Como $(f_n(x_1))$ é limitada em $\mathbb{K}$, pelo teorema de Bolzano–Weierstrass existe uma subsucessão

$$(f_n^{(1)})$$

tal que $(f_n^{(1)}(x_1))$ converge. Suponhamos construída uma subsucessão

$$(f_n^{(k-1)})$$

tal que $(f_n^{(k-1)}(x_j))$ converge para todo $j = 1, \ldots, k-1$. Novamente por Bolzano–Weierstrass, existe uma subsucessão

$$(f_n^{(k)})$$

de $(f_n^{(k-1)})$ tal que $(f_n^{(k)}(x_k))$ também converge. Consideremos agora a sucessão diagonal

$$g_n = f_n^{(n)}.$$

Para cada k, a sucessão $(g_n(x_k))$ converge. Como a família (g_n) é uniformemente limitada, $\sup_n \|g_n\| < \infty$, a Proposição da extensão por densidade implica que existe $f \in X'$ tal que

$$g_n(x) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Logo, $g_n \rightharpoonup^* f$ em X'. □

Exemplo 11.11 (Extração de uma subsucessão fraca-* em $L^\infty(0,1)$)**.** Considere a sucessão

$$f_n(x) = \sin(2\pi n x), \qquad x \in (0,1).$$

Como $\|f_n\|_{L^\infty} \leq 1$, a sucessão é limitada em

$$L^\infty(0,1) = (L^1(0,1))'.$$

Como $L^1(0,1)$ é separável, o teorema de Banach garante a existência de uma subsucessão (f_{n_k}) e de uma função

$$f \in L^\infty(0,1)$$

tais que

$$f_{n_k} \rightharpoonup^* f \qquad \text{em } L^\infty(0,1).$$

Isto significa que

$$\int_0^1 f_{n_k}(x)\, v(x)\, dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx, \qquad \forall\, v \in L^1(0,1).$$

Neste exemplo particular, o lema de Riemann–Lebesgue mostra que

$$\int_0^1 f_n(x)\, v(x)\, dx \longrightarrow 0, \qquad \forall\, v \in L^1(0,1).$$

Consequentemente, $f = 0$, e, portanto,

$$f_{n_k} \rightharpoonup^* 0 \qquad \text{em } L^\infty(0,1).$$

11.5 Dualidade e convergência fraca em L^p

Os resultados desta secção são aplicações da teoria geral da convergência fraca aos espaços $L^p(\Omega,\mu)$.

Proposição 11.12 (Banach–Steinhaus em L^p)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e suponha que*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega,\mu).$$

Então,

$$\sup_n \|u_n\|_p < \infty$$

e

$$\|u\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p.$$

Demonstração. A limitação uniforme segue do princípio da limitação uniforme (teorema de Banach–Steinhaus). Além disso, pela caracterização dual da norma,

$$\|u\|_p = \sup_{\substack{v\in L^{p'} \\ \|v\|_{p'}\le 1}} \left| \int_\Omega uv \, d\mu \right|.$$

Como

$$\int_\Omega u_n v \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega uv \, d\mu,$$

temos, para todo $v \in L^{p'}$ com $\|v\|_{p'} \le 1$,

$$\left| \int_\Omega uv \, d\mu \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n v \, d\mu \right| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p.$$

Tomando o supremo sobre tais funções v, obtemos

$$\|u\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p.$$

□

A proposição de extensão por densidade admite uma aplicação imediata aos espaços L^p, fornecendo um critério simples para estabelecer a convergência fraca.

Proposição 11.13. *Seja $1 < p < \infty$, seja $Z \subset L^{p'}(\Omega,\mu)$ um subconjunto denso e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega,\mu)$ tal que*

(i)

$$\sup_n \|u_n\|_p < \infty;$$

(ii) para todo $v \in Z$, a sucessão

$$\int_\Omega u_n v \, d\mu$$

converge.

Então existe $u \in L^p(\Omega,\mu)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega,\mu).$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$A_n : L^{p'}(\Omega,\mu) \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad A_n(v) = \int_\Omega u_n v \, d\mu.$$

Pelo teorema de representação do dual de $L^{p'}$, temos $A_n \in \big(L^{p'}(\Omega,\mu)\big)'$ e $\|A_n\| = \|u_n\|_p$. Logo, $\sup_n \|A_n\| < \infty$. Por hipótese, para todo $v \in Z$, a sucessão $(A_n(v))$ converge. Como Z é denso em $L^{p'}(\Omega,\mu)$, a proposição de extensão por densidade garante a existência de $A \in \big(L^{p'}(\Omega,\mu)\big)'$ tal que

$$A_n(v) \longrightarrow A(v), \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega,\mu).$$

Novamente pelo teorema de representação do dual, existe $u \in L^p(\Omega,\mu)$ tal que

$$A(v) = \int_\Omega uv\,d\mu, \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega,\mu).$$

Portanto,

$$\int_\Omega u_n v\,d\mu \longrightarrow \int_\Omega uv\,d\mu, \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega,\mu),$$

isto é,

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega,\mu).$$

□

11.5.1 Convergência fraca em $L^p(\Omega,\mu)$

Proposição 11.14. *Seja $1 < p < \infty$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega,\mu)$ tal que*
(i)

$$\sup_n \|u_n\|_p < \infty;$$

(ii) $u_n \to u$ quase em toda a parte em Ω.
Então

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega,\mu).$$

Demonstração. Pelo lema de Fatou, $\|u\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p < \infty$, logo $u \in L^p(\Omega,\mu)$. Seja $v \in L^{p'}(\Omega,\mu)$ e definamos

$$A_n = \{|u_n - u| \le |v|^{p'-1}\}, \qquad B_n = \Omega \setminus A_n.$$

Então

$$\int_\Omega |u_n - u|\,|v|\,d\mu = \int_{A_n} |u_n - u|\,|v|\,d\mu + \int_{B_n} |u_n - u|\,|v|\,d\mu.$$

Em A_n, $|u_n - u|\,|v| \le |v|^{p'}$, e como

$$|u_n - u|\,|v| \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p.},$$

o teorema da convergência dominada implica

$$\int_{A_n} |u_n - u|\,|v|\,d\mu \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{B_n} |u_n - u|\,|v|\,d\mu \le \|u_n - u\|_p \left(\int_{B_n} |v|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'}.$$

Além disso,

$$\|u_n - u\|_p \le \|u_n\|_p + \|u\|_p \le 2c,$$

onde $c = \sup_n \|u_n\|_p$. Como

$$\chi_{B_n}|v|^{p'} \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p.},$$

e

$$0 \leq \chi_{B_n}|v|^{p'} \leq |v|^{p'} \in L^1(\Omega),$$

segue novamente pelo teorema da convergência dominada que

$$\int_{B_n} |v|^{p'}\, d\mu \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |u_n - u|\,|v|\, d\mu \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega (u_n - u)v\, d\mu \longrightarrow 0, \qquad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega, \mu).$$

Concluímos que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega, \mu).$$

□

Quando a medida é a medida de Lebesgue, podemos combinar o resultado anterior com o teorema de Banach para obter um importante resultado de compacidade.

Teorema 11.15 (Compacidade fraca em $L^p(\Omega)$)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então toda sucessão limitada em $L^p(\Omega)$ admite uma subsucessão fracamente convergente.*

Demonstração. Como $1 < p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo e

$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega).$$

Além disso, $L^{p'}(\Omega)$ é separável. Seja (u_n) uma sucessão limitada em $L^p(\Omega)$. Identificando $L^p(\Omega)$ com o dual de $L^{p'}(\Omega)$, o teorema de Banach fornece uma subsucessão (u_{n_k}) e uma função $u \in L^p(\Omega)$ tais que

$$u_{n_k} \rightharpoonup^* u \qquad \text{em } L^p(\Omega).$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo, as convergências fraca e fraca-* coincidem. Portanto,

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^p(\Omega).$$

□

11.6 Contraexemplos e fenómenos de convergência fraca

11.6.1 Falta de compacidade fraca em L^1

A hipótese $1 < p < \infty$ no teorema de compacidade fraca é essencial. Com efeito, uma sucessão limitada em L^1 não admite necessariamente uma subsucessão fracamente convergente.

Exemplo 11.16 (Concentração em L^1)**.** Fixe $x_0 \in (0,1)$ e, para n suficientemente grande, definamos

$$f_n(x) = n\,\chi_{(x_0,x_0+1/n)}(x).$$

Então

$$\|f_n\|_1 = \int_{x_0}^{x_0+1/n} n\,dx = 1,$$

pelo que (f_n) é limitada em $L^1(0,1)$.
Além disso,

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } x \neq x_0.$$

No entanto, (f_n) não admite nenhuma subsucessão fracamente convergente em $L^1(0,1)$.
Com efeito, suponhamos que

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \qquad \text{em } L^1(0,1).$$

Se $g \in L^\infty(0,1)$ se anula numa vizinhança de x_0, então

$$\int_0^1 f_{n_k} g\,dx = 0$$

para k suficientemente grande. Logo,

$$\int_0^1 fg\,dx = 0$$

para toda função $g \in L^\infty(0,1)$ que se anula numa vizinhança de x_0. Daí resulta que

$$f = 0 \qquad \text{q.t.p. em } (0,1).$$

Por outro lado, tomando $g \equiv 1$, obtemos

$$\int_0^1 f_{n_k} g\,dx = \int_0^1 f_{n_k}\,dx = 1,$$

o que não converge para

$$\int_0^1 fg\,dx = 0.$$

Chegamos assim a uma contradição. Portanto, nenhuma subsucessão de (f_n) converge fracamente em $L^1(0,1)$.

11.6.2 Oscilação, concentração e translação

A convergência fraca não implica, em geral, a convergência forte. Entre os principais mecanismos responsáveis por esta falta de compacidade encontram-se a oscilação, a concentração e a translação.

Oscilação

Considere a sucessão

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \qquad x \in (0, \pi).$$

A sucessão (e_n) é ortonormal em $L^2(0, \pi)$. Pela desigualdade de Bessel, para todo $u \in L^2(0, \pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} u(x) e_n(x)\, dx \right|^2 \leq \|u\|_2^2.$$

Em particular,

$$\int_0^{\pi} u(x) e_n(x)\, dx \longrightarrow 0,$$

logo

$$e_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{em } L^2(0, \pi).$$

No entanto, $\|e_n\|_2 = 1$ para todo n, pelo que (e_n) não converge fortemente para 0.

Proposição 11.17 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja (e_n) uma sucessão ortonormal num espaço de Hilbert H. Então, para todo $u \in H$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u \mid e_n)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$v_k = \sum_{n=1}^{k} (u \mid e_n) e_n.$$

Como $u - v_k$ é ortogonal a v_k, pela identidade de Pitágoras, $\|u\|^2 = \|u - v_k\|^2 + \|v_k\|^2$. Além disso, pela ortonormalidade,

$$\|v_k\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |(u \mid e_n)|^2.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{k} |(u \mid e_n)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u \mid e_n)|^2 \leq \|u\|^2.$$

□

Concentração

Seja $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ não nula e seja $1 < p < \infty$. Definamos $u_n(x) = n^{N/p}u(nx)$. Por mudança de variável,

$$\|u_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} n^N |u(nx)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p \, dy,$$

logo $\|u_n\|_p = \|u\|_p$. Além disso,

$$u_n(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

pois o suporte de u_n se contrai para a origem. Pela proposição anterior,

$$u_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N),$$

mas a convergência não é forte, uma vez que $\|u_n\|_p = \|u\|_p > 0$.

Translação

Seja $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ não nula e definamos $u_n(x) = u(x - ne_1)$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. A invariância da medida de Lebesgue por translação implica $\|u_n\|_p = \|u\|_p$ para todo n. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $u_n(x) \longrightarrow 0$, pois o suporte de u_n se afasta indefinidamente. Pela proposição anterior,

$$u_n \rightharpoonup 0 \qquad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

No entanto, $\|u_n\|_p = \|u\|_p > 0$, pelo que a convergência não é forte.

11.6.3 Teorema de Mazur

Teorema 11.18 (Mazur)**.** *Seja X um espaço de Banach real separável e seja $(x_n) \subset X$ uma sucessão tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \text{em } X.$$

Então existe uma sucessão $(y_n) \subset X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k^{(n)} x_k,$$

onde

$$\lambda_k^{(n)} \geq 0, \qquad \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k^{(n)} = 1,$$

e

$$y_n \longrightarrow x \qquad \text{fortemente em } X.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $C_n = \overline{\text{co}}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, onde o fecho é tomado relativamente à norma de X. Afirmamos que

$$x \in C_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $x \notin C_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Os conjuntos

$$A = C_n \qquad \text{e} \qquad B = \{x\}$$

são convexos, não vazios e disjuntos, sendo A fechado e B compacto. Pelo teorema de separação na sua forma geométrica, existem $f \in X'$, com $f \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle f, z\rangle < \alpha < \langle f, x\rangle \qquad \text{para todo } z \in C_n.$$

Como $x_k \in C_n$ para todo $k \geq n$, segue que

$$\langle f, x_k\rangle < \alpha \qquad \text{para todo } k \geq n.$$

Por outro lado, da convergência fraca $x_k \rightharpoonup x$ obtemos $\langle f, x_k\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$. Passando ao limite na desigualdade anterior, concluímos que $\langle f, x\rangle \leq \alpha$, o que contradiz $\alpha < \langle f, x\rangle$. Logo, $x \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de fecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \text{co}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ tal que $\|y_n - x\| < \frac{1}{n}$. Como y_n pertence ao invólucro convexo, existem $N_n \geq n$ e números

$$\lambda_k^{(n)} \geq 0, \qquad n \leq k \leq N_n,$$

tais que

$$\sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k^{(n)} = 1 \qquad \text{e} \qquad y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k^{(n)} x_k.$$

Finalmente, $\|y_n - x\| < \frac{1}{n}$, e, portanto, $y_n \longrightarrow x$ fortemente em X. □

11.7 Topologias fracas

As convergências fraca e fraca-* introduzidas anteriormente podem ser interpretadas como convergências associadas a determinadas topologias.

Definição 11.19 (Topologia fraca)**.** Seja X um espaço normado. A *topologia fraca* em X, denotada por

$$\sigma(X, X'),$$

é a topologia menos fina que torna contínua toda aplicação

$$x \longmapsto f(x), \qquad f \in X'.$$

Uma base de vizinhanças fracas de um ponto $x \in X$ é constituída pelos conjuntos

$$V(x; f_1, \ldots, f_m; \varepsilon) = \{y \in X : |f_j(y - x)| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, m\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_m \in X'$ e $\varepsilon > 0$.

Proposição 11.20. *Seja $(x_n) \subset X$ e seja $x \in X$. Então*

$$x_n \rightharpoonup x$$

se e somente se (x_n) converge para x relativamente à topologia $\sigma(X, X')$.

Demonstração. Se $x_n \rightharpoonup x$, então, para quaisquer $f_1, \ldots, f_m \in X'$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_j(x_n - x)| < \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

para todo $n \geq N$. Logo, $x_n \in V(x; f_1, \ldots, f_m; \varepsilon)$ para todo $n \geq N$, pelo que $x_n \to x$ em $\sigma(X, X')$. Reciprocamente, se $x_n \to x$ em $\sigma(X, X')$, então, para cada $f \in X'$ e cada $\varepsilon > 0$, a sucessão (x_n) pertence eventualmente à vizinhança $V(x; f; \varepsilon)$. Assim, $|f(x_n - x)| < \varepsilon$ para n suficientemente grande, donde $f(x_n) \to f(x)$. Portanto, $x_n \rightharpoonup x$. □

Definição 11.21 (Topologia fraca-*)**.** Seja X um espaço normado. A *topologia fraca-** em X', denotada por

$$\sigma(X', X),$$

é a topologia menos fina que torna contínua toda aplicação de avaliação

$$f \longmapsto f(x), \qquad x \in X.$$

Uma base de vizinhanças fracas-* de um ponto $f \in X'$ é constituída pelos conjuntos

$$V^*(f; x_1, \ldots, x_m; \varepsilon) = \left\{ g \in X' : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, m \right\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Proposição 11.22. *Seja $(f_n) \subset X'$ e seja $f \in X'$. Então*

$$f_n \rightharpoonup^* f$$

se e somente se (f_n) converge para f relativamente à topologia $\sigma(X', X)$.

Demonstração. A demonstração é análoga à da proposição anterior, utilizando as aplicações de avaliação

$$g \longmapsto g(x), \qquad x \in X.$$

□

Nota 11.23. Em X', consideramos três topologias:

$$\text{topologia forte}, \qquad \sigma(X', X''), \qquad \sigma(X', X).$$

A topologia fraca-* é menos fina do que a topologia fraca, e a topologia fraca é menos fina do que a topologia forte.

Nota 11.24. Uma topologia menos fina possui menos conjuntos abertos e torna mais fácil a obtenção de propriedades de compacidade. Esta é uma das principais razões para a utilização das topologias fraca e fraca-* em problemas de existência.

11.7.1 Teorema de Banach–Alaoglu

Teorema 11.25 (Banach–Alaoglu)**.** *Seja X um espaço normado. Então a bola unitária fechada de X' é compacta relativamente à topologia fraca-* $\sigma(X', X)$.*

Nota 11.26. A demonstração do Teorema de Banach apresentada anteriormente, baseada num argumento diagonal, utiliza apenas propriedades sequenciais e não requer o axioma da escolha na sua forma completa. Em contrapartida, a demonstração geral do Teorema de Banach–Alaoglu recorre habitualmente ao Teorema de Tychonoff para produtos arbitrários de espaços compactos, o qual é equivalente ao axioma da escolha. Assim, no contexto destas notas, o Teorema de Banach pode ser visto como uma versão sequencial de Banach–Alaoglu, suficiente para a maioria das aplicações em espaços separáveis.

11.7.2 Convergência fraca e forte

Embora, em geral, a convergência fraca seja estritamente mais fraca do que a convergência forte, estas duas noções coincidem sob uma hipótese adicional sobre as normas. O resultado seguinte mostra que, em espaços uniformemente convexos, basta acrescentar a convergência das normas para recuperar a convergência forte.

Teorema 11.27 (Radon–Riesz)**.** *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e seja $(x_n) \subset X$ tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \qquad e \qquad \|x_n\|_X \longrightarrow \|x\|_X.$$

Então

$$\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Se $x = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos $x \neq 0$ e definamos $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $\frac{x}{\|x\|}$. Então $y_n \rightharpoonup y$. Como $\|y\| = 1$, pelo Corolário 9.10, existe $f \in X'$ satisfazendo

$$\|f\|_{X'} = \|y\| = 1 \qquad \text{e} \qquad f(y) = \|y\|^2 = 1.$$

Da convergência fraca obtemos $f(y_n) \longrightarrow 1$. Como

$$f\left(\frac{y_n + y}{2}\right) = \frac{f(y_n) + f(y)}{2},$$

temos $f\left(\frac{y_n+y}{2}\right) \longrightarrow 1$. Por outro lado, $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \leq 1$. Logo, $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \longrightarrow 1$. Como X é uniformemente convexo, segue do Exercício 77 que

$$\|y_n - y\|_p \longrightarrow 0.$$

Finalmente,

$$\|x_n - x\| = \|\|x_n\|y_n - \|x\|y\| \leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \, \|y\|.$$

Como $\|y\| = 1$, $\|x_n\| \to \|x\|$ e $\|y_n - y\| \to 0$, concluímos que $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$. □

11.8 Medidas de Radon

As medidas de Radon desempenham um papel central na Análise Funcional, na Teoria da Medida e nas Equações às Derivadas Parciais. Constituem uma extensão natural das funções integráveis e permitem descrever objetos concentrados, como massas pontuais, cargas distribuídas ou fronteiras de conjuntos. Neste capítulo, definiremos as medidas de Radon como funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{C}_c(\Omega)$ e mostraremos que as medidas finitas se estendem naturalmente a $\mathcal{C}_0(\Omega)$. Esta abordagem permite aplicar diretamente os resultados gerais sobre convergência fraca-* estabelecidos no capítulo anterior.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.

Definição 11.28 (Medidas de Radon)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $M \in \mathbb{N}$.
Uma *medida de Radon* é uma aplicação linear contínua

$$\mu : \mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se $M > 1$, dizemos que μ é uma *medida de Radon vetorial*.

Definição 11.29 (Variação total)**.** A *variação total* de uma medida de Radon μ é definida por

$$|\mu|_\Omega = \sup \left\{ \langle \mu, f \rangle : f \in \mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^M),\ \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Denotamos por

$$\mathcal{M}(\Omega)$$

o espaço de todas as medidas de Radon em Ω. Dizemos que uma medida de Radon μ é *finita* se

$$|\mu|_\Omega < \infty.$$

O espaço $\mathcal{M}(\Omega)$ munido da norma $|\cdot|(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 11.30 (Funções integráveis)**.** Seja $f \in L^1(\Omega)$. A aplicação

$$\langle \mu_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega),$$

define uma medida de Radon. Neste caso,

$$|\mu_f|(\Omega) = \int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

Exemplo 11.31 (Massa de Dirac)**.** Seja $x_0 \in \Omega$. A aplicação

$$\delta_{x_0} : \mathcal{C}_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0),$$

define uma medida de Radon, denominada *massa de Dirac* em x_0. Além disso, $|\delta_{x_0}|(\Omega) = 1$.

Nota 11.32. As funções de $L^1(\Omega)$ descrevem distribuições contínuas de massa, enquanto as massas de Dirac representam massas concentradas num único ponto. O espaço das medidas de Radon contém simultaneamente estes dois tipos de objetos e constitui, por isso, o enquadramento natural para numerosos problemas de Análise, Cálculo das Variações e Equações às Derivadas Parciais.

11.8.1 Extensão a $\mathcal{C}_0$

O resultado seguinte mostra que toda medida de Radon finita admite uma extensão contínua ao espaço $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$.

Proposição 11.33. *Toda medida de Radon finita $\mu : \mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^M) \longrightarrow \mathbb{R}$ admite uma única extensão linear contínua a $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$. Existe uma sucessão $(u_n) \subset \mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^M)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ uniformemente. Como $|\mu|_\Omega < \infty$, temos

$$|\langle \mu, u - u_n\rangle| \leq |\mu|_\Omega \, \|u - u_n\|_\infty,$$

pelo que $\langle \mu, u_n\rangle$ é uma sucessão de Cauchy. Definimos então

$$\langle \mu, u\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle \mu, u_n\rangle.$$

A definição é independente da sucessão aproximante e fornece uma extensão linear contínua de μ a $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$. □

Definição 11.34 (Medidas de Radon finitas)**.** Uma aplicação linear contínua

$$\mu : \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

chama-se uma *medida de Radon finita*. A sua variação total é dada por

$$|\mu|_\Omega = \sup\left\{\langle \mu, f\rangle : f \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M),\ \|f\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Denotamos por

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$$

o espaço das medidas de Radon finitas.

11.8.2 Separabilidade

Nota 11.35. O espaço $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é separável.

Demonstração. O caso escalar é um resultado clássico da Análise Funcional. Como

$$\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M) = \underbrace{\mathcal{C}_0(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{C}_0(\Omega)}_{M \text{ vezes}},$$

segue-se que $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é igualmente separável. □

11.8.3 Compacidade fraca-*

A identificação das medidas de Radon finitas com elementos do dual de $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ permite aplicar diretamente o Teorema de Banach demonstrado no capítulo anterior.

Teorema 11.36 (de la Vallée Poussin)**.** *Seja* $(\mu_n) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ *tal que*

$$\sup_n |\mu_n|_\Omega < \infty.$$

Então existe uma subsucessão, ainda denotada por (μ_n)*, e uma medida* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ *tais que*

$$\mu_n \rightharpoonup^* \mu \quad \text{em } \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega),$$

isto é,

$$\langle \mu_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \mu, \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M).$$

Demonstração. Como $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)$ é separável, o Teorema de Banach aplica-se ao seu dual

$$\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^M)' = \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega).$$

A hipótese

$$\sup_n |\mu_n|_\Omega < \infty$$

significa precisamente que a sucessão é limitada no dual. Portanto, existe uma subsucessão fracamente-* convergente. □

11.8.4 Aplicação a L^∞

Recordemos que

$$L^\infty(\Omega) = \big(L^1(\Omega)\big)'.$$

Assim, o Teorema de Banach aplica-se imediatamente a sucessões limitadas de funções de $L^\infty(\Omega)$.

Nota 11.37. Seja $(u_n) \subset L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\sup_n \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le M.$$

Então existe uma subsucessão, ainda denotada por (u_n), e uma função $u \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup^* u \qquad \text{em } L^\infty(\Omega).$$

Isto significa que

$$\int_\Omega u_n\, g\, d\mu \longrightarrow \int_\Omega u\, g\, d\mu, \qquad \forall\, g \in L^1(\Omega).$$

Exemplo 11.38. Considere a sucessão

$$u_n(x) = \sin(2\pi n x), \qquad x \in (0,1).$$

Como $\|u_n\|_{L^\infty(0,1)} = 1$, a sucessão é limitada em $L^\infty(0,1)$. Pelo resultado anterior, admite uma subsucessão fracamente-* convergente. Além disso, pelo lema de Riemann–Lebesgue,

$$\int_0^1 u_n(x)\, g(x)\, dx \longrightarrow 0, \qquad \forall\, g \in L^1(0,1),$$

pelo que, na realidade,

$$u_n \rightharpoonup^* 0 \qquad \text{em } L^\infty(0,1).$$

Nota histórica

As topologias fracas foram introduzidas por Stefan Banach [5]como uma forma de recuperar propriedades de compacidade que se perdem na topologia da norma. Em 1940, Leonidas Alaoglu demonstrou a compacidade fraca-* da bola unitária do dual, um resultado que se tornou um dos pilares da Análise Funcional moderna. Poucos anos antes, Stanisław Mazur mostrara que toda convergência fraca pode ser aproximada por combinações convexas fortemente convergentes. A noção de medida de Radon, introduzida por Johann Radon em 1913 [63], veio fornecer um enquadramento unificado para funções integráveis, massas concentradas e numerosos problemas da Análise, das Equações às Derivadas Parciais e da Teoria Geométrica da Medida.

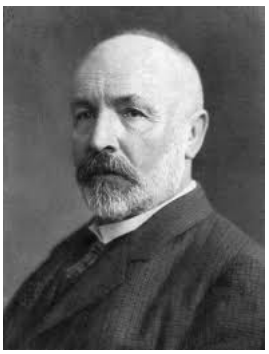
Nota bibliográfica

Para o estudo das topologias fracas e da convergência fraca, recomendam-se *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de Haim Brezis [12], *A Course in Functional Analysis*, de John B. Conway [19], *Sequences and Series in Banach Spaces*, de Joseph Diestel [22], e *Functional Analysis*, de Walter Rudin [66]. Para o estudo das medidas de Radon e das suas aplicações, podem consultar-se *Measure Theory*, de Vladimir I. Bogachev [8], *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, de Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy [28], e *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, de Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara [2].

Capítulo 12

Conjuntos de Cantor

12.1 Definição geral



Georg Cantor
(1845–1918)

Definição 12.1 (Conjunto de Cantor generalizado)**.** Seja $0 < \varepsilon \leq 1$ e seja $(\ell_n) \subset (0,1)$ tal que

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \ell_n.$$

Partindo do intervalo $C_0 = [0,1]$, removemos o intervalo aberto central $J_{0,1}$ de comprimento ℓ_0. Dos dois intervalos fechados restantes removemos os intervalos abertos centrais $J_{1,1}$ e $J_{1,2}$, ambos de comprimento ℓ_1. Em geral, dos 2^n intervalos fechados que constituem C_n, removemos os intervalos abertos centrais $J_{n,1}, \ldots, J_{n,2^n}$, todos de comprimento ℓ_n. Definamos

$$C_{n+1} = C_n \setminus \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}, \qquad C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

O conjunto C chama-se o **conjunto de Cantor** associado à sucessão (ℓ_n).
Em particular, $\ell_n \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty$.

12.2 Exemplo clássico

Exemplo 12.2 (Conjunto de Cantor clássico)**.** Consideremos $\ell_n = \frac{1}{3^{n+1}}$, o que corresponde à remoção do terço médio em cada etapa. O conjunto de Cantor clássico é definido por

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n,$$

onde

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

e

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

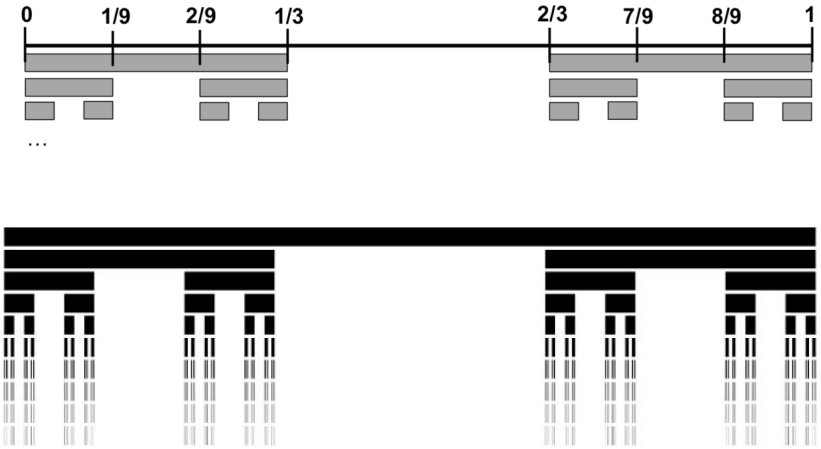
Em geral, F_n é a união de 2^n intervalos fechados da forma

$$\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right].$$

O comprimento total de F_n é $m(F_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

12.3 Construção geométrica

O conjunto de Cantor obtém-se removendo sucessivamente os intervalos abertos centrais em cada etapa da construção.



12.4 Propriedades fundamentais

Proposição 12.3. *O conjunto de Cantor C é fechado.*

Demonstração. Cada C_n é uma união finita de intervalos fechados. Logo, C_n é fechado.

Como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

segue-se que C é fechado. □

Definição 12.4. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ diz-se **perfeito** se é fechado e todo ponto de E é ponto de acumulação de E, isto é, para todo $x \in E$ e todo $\delta > 0$,

$$(E \setminus \{x\}) \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \varnothing.$$

Proposição 12.5. *O conjunto de Cantor C é perfeito.*

Demonstração. Já sabemos que C é fechado. Seja $x \in C$. Para cada n, existe um único intervalo fechado $[a_n, b_n] \subset C_n$ que contém x. Os comprimentos destes intervalos tendem para zero quando $n \to \infty$. Assim, pelo menos um dos extremos de $[a_n, b_n]$ é diferente de x, pertence a C e converge para x. Logo, todo ponto de C é ponto de acumulação de C. Concluímos que C é perfeito. □

Proposição 12.6. *O interior de C é vazio.*

Demonstração. Suponha que exista um intervalo aberto $I = (a, b) \subset C$. Então $I \subset C_n$ para todo n. Como as componentes conexas de C_n são intervalos fechados cujos comprimentos tendem para zero quando $n \to \infty$, obtemos

$$0 < b - a \leq \max\{|J|;\ J \text{ componente conexa de } C_n\} \longrightarrow 0,$$

o que é impossível. Logo, C tem interior vazio. □

Proposição 12.7. *A medida de Lebesgue de C é*

$$m(C) = 1 - \varepsilon.$$

Demonstração. Por indução,

$$m(C_{n+1}) = 1 - \sum_{j=0}^{n} 2^j \ell_j.$$

Passando ao limite,

$$m(C) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \ell_j = 1 - \varepsilon.$$

□

Proposição 12.8. *O conjunto de Cantor C é não numerável.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset C$ uma sucessão arbitrária. Escolhemos um intervalo fechado $[a_1, b_1]$ que seja uma componente conexa de C_1 e que não contenha x_1. Supondo construído $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, escolhemos uma componente conexa $[a_n, b_n]$ de

$$C_n \cap [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

que não contenha x_n. Obtém-se assim uma sucessão decrescente de intervalos fechados $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, cujos comprimentos tendem para zero. Pelo princípio dos intervalos encaixados, existe um único ponto

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Como $[a_n, b_n] \subset C_n$ para todo n, segue-se que $x \in C$. Além disso, $x_n \notin [a_n, b_n]$, pelo que $x \neq x_n$ para todo n. Logo, nenhuma sucessão consegue enumerar C, isto é, C é não numerável. □

12.5 Observações adicionais

> *Nota* 12.9. Quando $\varepsilon = 1$, obtém-se um conjunto de Cantor não numerável com medida de Lebesgue nula.

Por fim, estudemos a função característica do conjunto de Cantor, χ_C.

> **Proposição 12.10.** *A função característica χ_C satisfaz:*
> - *é superiormente semicontínua;*
> - *é integrável;*
> - *é descontínua em todo ponto de C.*

Demonstração. Como C é fechado, a função característica χ_C é superiormente semicontínua. Além disso,

$$\int \chi_C \, dm = m(C),$$

pelo que χ_C é integrável. Finalmente, seja $x \in C$. Como C é perfeito, existe uma sucessão $(x_n) \subset C \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$.

Por outro lado, como C tem interior vazio, toda vizinhança de x contém pontos do complementar de C. Assim, existe uma sucessão $(y_n) \subset C^c$ tal que $y_n \to x$. Consequentemente,

$$\chi_C(x_n) = 1, \qquad \chi_C(y_n) = 0,$$

o que mostra que χ_C não é contínua em x. □

12.6 Exercícios

Exercício 86 (F)

Mostrar que o conjunto de Cantor não possui pontos isolados.

Exercício 87 (F)

Mostrar que o conjunto de Cantor é totalmente desconexo.

Exercício 88 (F)

Mostrar que a função característica χ_C é superiormente semicontínua.

Nota histórica

O conjunto de Cantor foi introduzido por Georg Cantor em 1883, no contexto dos seus trabalhos fundadores sobre a teoria dos conjuntos. Inicialmente concebido como um exemplo de conjunto fechado sem intervalos interiores, revelou propriedades notáveis: é perfeito, totalmente desconexo e não numerável.

A construção de Cantor desempenhou um papel decisivo no desenvolvimento da Análise Real e da Topologia, mostrando que um conjunto pode ser simultaneamente pequeno do ponto de vista topológico (interior vazio) e grande do ponto de vista cardinal (não numerável). Posteriormente verificou-se que variantes da construção permitem obter conjuntos de Cantor com qualquer medida de Lebesgue compreendida entre 0 e 1.

Atualmente, os conjuntos de Cantor surgem naturalmente na teoria da medida, na topologia, na análise harmónica, nos sistemas dinâmicos, na teoria ergódica e na geometria fractal.

Nota bibliográfica

Embora o conjunto leve hoje o nome de Georg Cantor, uma construção essencialmente equivalente havia já sido introduzida por Henry John Stephen Smith no artigo *On the Integration of Discontinuous Functions*, publicado em 1875, no contexto do estudo da integrabilidade de funções descontínuas [70]. Alguns anos mais tarde, em 1883, Georg Cantor apresentou a construção clássica baseada na remoção sucessiva do terço médio, no âmbito dos seus trabalhos fundadores sobre conjuntos perfeitos e teoria dos conjuntos [14]. Foi esta apresentação que se tornou canónica e deu ao conjunto o nome pelo qual é atualmente conhecido.

Os conjuntos de Cantor constituem hoje exemplos fundamentais da Análise Real e da Topologia. Apresentações clássicas podem ser encontradas em *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B. Folland [31], em *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], em *Introduction to Topology and Modern Analysis*, de G. F. Simmons [69], e em *Topology*, de J. R. Munkres [57]. As relações entre os conjuntos de Cantor, a dimensão de Hausdorff e a geometria fractal são desenvolvidas em *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, de K. Falconer [29].

Parte III

A Construção Clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue

A construção de Daniell mostrou que é possível desenvolver a teoria da integração a partir de funcionais lineares positivos. Nesta terceira parte seguimos agora o percurso histórico iniciado por Lebesgue e Carathéodory, no qual a medida dos conjuntos constitui o ponto de partida da teoria.

Introduzimos as σ-álgebras, as medidas exteriores e o critério de mensurabilidade de Carathéodory, que conduzem naturalmente à construção das medidas de Borel e de Radon. Desenvolvemos em seguida a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e a teoria da integração de funções mensuráveis, culminando nos principais teoremas de convergência.

Embora esta abordagem difira profundamente da construção funcional apresentada na parte anterior, ambas conduzem à mesma noção de integral. A coexistência destas duas perspetivas constitui uma das riquezas da Teoria da Medida: uma privilegia a estrutura funcional da integração, enquanto a outra assenta na geometria dos conjuntos mensuráveis e das medidas.

O objetivo desta parte é apresentar a construção clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue de forma rigorosa e progressiva, preparando o estudo das propriedades estruturais das medidas de Radon e dos teoremas de representação que constituem o objeto da parte final destas notas.

Capítulo 13

Fundamentos da teoria da medida

> In mathematics you don't understand things. You just get used to them.
>
> — Atribuída a John von Neumann

13.1 Motivação

A teoria da integração de Riemann constitui uma das realizações fundamentais da Análise clássica. Contudo, ela revela limitações importantes quando se estudam limites de sucessões de funções, espaços funcionais ou problemas variacionais. Em particular, não dispõe de propriedades de convergência suficientemente robustas para muitas aplicações modernas. A teoria da medida ultrapassa essas dificuldades ao introduzir uma noção abstrata de "tamanho" para subconjuntos de um espaço. A partir dessa noção constrói-se a integral de Lebesgue, que preserva as propriedades essenciais da integração e possui excelentes propriedades de convergência.

O objetivo deste capítulo é desenvolver os fundamentos da teoria da medida. Introduziremos sucessivamente as noções de σ-álgebra, medida exterior, conjunto mensurável, medida e completamento. Estudaremos igualmente a construção de Carathéodory, que constitui um dos pilares da teoria moderna da medida. Salvo indicação em contrário, X denotará um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Sempre que necessário, assumiremos adicionalmente que X é metrizável ou σ-compacto. O exemplo fundamental será o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

13.2 σ-álgebras

A noção de σ-álgebra identifica as coleções de conjuntos sobre as quais será possível definir uma medida. As propriedades de estabilidade por complemento e por união numerável garantem que as operações usuais da teoria da medida preservam a mensurabilidade.

Definição 13.1 (σ-álgebra)**.** Seja $X \neq \emptyset$. Uma coleção $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ diz-se uma σ-álgebra se satisfaz:

1. $X \in \Sigma$;
2. se $A \in \Sigma$, então $A^c \in \Sigma$;
3. se $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Sigma$, então
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

O par (X, Σ) denomina-se um *espaço mensurável*.

Proposição 13.2. *Se Σ é uma σ-álgebra, então:*

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. *se* $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Sigma$, *então*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma;$$
3. *Σ é estável por uniões e interseções finitas.*

Demonstração. Como $X \in \Sigma$, segue-se de $X^c = \emptyset$ que $\emptyset \in \Sigma$. A estabilidade por interseções numeráveis resulta das leis de De Morgan:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c.$$
Finalmente, uniões e interseções finitas são casos particulares das correspondentes operações numeráveis. □

Nota 13.3. O prefixo σ indica a presença de operações numeráveis. Encontramo-lo igualmente em expressões como σ-compacto, σ-finito e conjunto F_σ.

13.3 Conjuntos de Borel

Quando X é um espaço topológico, existe uma σ-álgebra naturalmente associada à sua topologia. Ela desempenha um papel fundamental em teoria da medida, pois constitui o domínio natural das medidas definidas a partir da estrutura topológica de X.

Definição 13.4 (σ-álgebra de Borel)**.** Seja X um espaço topológico. A menor σ-álgebra que contém todos os conjuntos abertos de X chama-se *σ-álgebra de Borel* e denota-se por
$$\mathcal{B}(X).$$
Os seus elementos chamam-se *conjuntos de Borel*, ou simplesmente *Borelianos*.

A existência desta menor σ-álgebra decorre do facto de a interseção arbitrária de σ-álgebras ser ainda uma σ-álgebra. Assim,
$$\mathcal{B}(X) = \bigcap \{\Sigma : \Sigma \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra que contém todos os abertos de } X\}.$$

Proposição 13.5. *A σ-álgebra de Borel contém:*

1. *todos os conjuntos fechados;*
2. *todas as uniões e interseções numeráveis de conjuntos de Borel;*
3. *os complementares de conjuntos de Borel.*

Demonstração. Como os fechados são complementares de conjuntos abertos, pertencem a $\mathcal{B}(X)$. As restantes propriedades decorrem diretamente da definição de σ-álgebra. □

Exemplo 13.6. Em $\mathbb{R}$, pertencem a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- todos os intervalos abertos, fechados ou semiabertos;
- todos os conjuntos finitos e numeráveis;
- todos os conjuntos fechados;
- todos os conjuntos obtidos a partir destes por um número numerável de uniões, interseções e complementações.

Nota 13.7. Nem todo subconjunto de um espaço topológico é Boreliano. A existência de conjuntos não Borelianos pode ser demonstrada em espaços como $\mathbb{R}$, embora tais exemplos sejam necessariamente bastante artificiais. Na prática, praticamente todos os conjuntos encontrados em Análise pertencem à σ-álgebra de Borel.

13.4 Medidas exteriores

A construção direta de uma medida sobre todos os subconjuntos de um espaço revela-se, em geral, impossível. A ideia fundamental de Carathéodory consiste em começar por definir uma função sobre todas as partes de X, suficientemente flexível para medir qualquer conjunto, e identificar posteriormente aqueles que são verdadeiramente mensuráveis.

Esta função denomina-se *medida exterior*.

Definição 13.8 (Medida exterior)**.** Seja $X \neq \emptyset$. Uma aplicação

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

diz-se uma *medida exterior* se satisfaz:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. se $A \subset B \subset X$, então
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B);$$
3. para toda a sucessão $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$,
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

A última propriedade denomina-se *σ-subaditividade*. Ao contrário do que sucede para uma medida, não se exige igualdade para uniões disjuntas.

Exemplo 13.9. A função

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

é uma medida exterior sobre qualquer conjunto X.

Nota 13.10. Uma medida exterior está definida sobre *todos* os subconjuntos de X. O papel do critério de Carathéodory consiste precisamente em selecionar os conjuntos para os quais essa medida exterior se comporta como uma medida.

13.5 Mensurabilidade de Carathéodory

Constantin Carathéodory
(1873–1950)

Definição 13.11 (Conjunto mensurável)**.** Seja μ^* uma medida exterior em X. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é μ^*-*mensurável* se, para todo $E \subset X$,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Nota 13.12 (Interpretação). Pela σ-subaditividade da medida exterior,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

é sempre verdadeira. Assim, a condição de mensurabilidade consiste precisamente na desigualdade inversa. Ela exprime que a fronteira de A não introduz qualquer excesso de medida quando um conjunto é decomposto nas partes situadas em A e no seu complementar. Em termos geométricos, um conjunto é mensurável quando a decomposição

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

preserva exatamente a medida exterior, para qualquer $E \subset X$. O resultado fun-

damental de Carathéodory mostra que estes conjuntos constituem precisamente o domínio natural sobre o qual uma medida exterior se torna uma verdadeira medida.

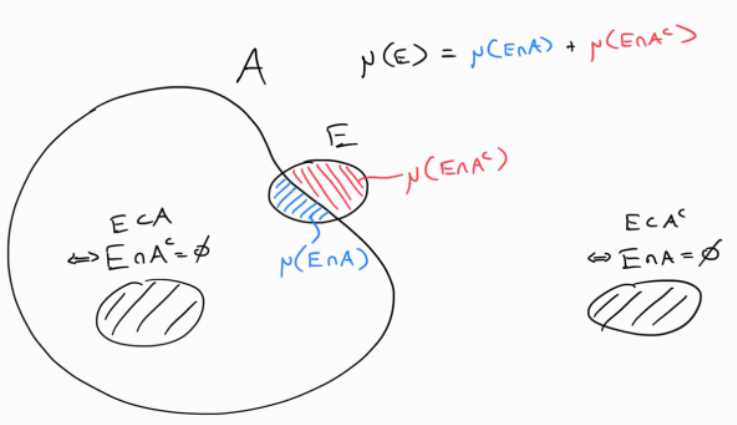


Figura 13.1: A mensurabilidade de Carathéodory significa que a decomposição de um conjunto E em $E \cap A$ e $E \cap A^c$ preserva exatamente a medida exterior.

Teorema 13.13 (Carathéodory)**.** *A coleção dos conjuntos μ^*-mensuráveis forma uma σ-álgebra.*

Demonstração. Escrevamos simplesmente μ em vez de μ^*.

(i) Estabilidade por complemento. Como

$$\emptyset^c = X,$$

temos imediatamente $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Se $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, então, pela definição de mensurabilidade,

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \cap E^c), \qquad \forall\, F \subset X,$$

o que mostra igualmente que $E^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

(ii) Estabilidade por união numerável. Seja $(E_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ e definamos

$$E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h.$$

Provemos que $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Fixemos um conjunto arbitrário $F \subset X$. Como E_0 é mensurável,

$$\mu(F) = \mu(F \setminus E_0) + \mu(F \cap E_0).$$

Aplicando novamente a definição de mensurabilidade ao conjunto E_1, obtemos

$$\mu(F \setminus E_0) = \mu\big(F \setminus (E_0 \cup E_1)\big) + \mu\big((F \setminus E_0) \cap E_1\big).$$

Substituindo esta identidade na anterior,

$$\mu(F) = \mu\big(F \setminus (E_0 \cup E_1)\big) + \mu\big((F \setminus E_0) \cap E_1\big) + \mu(F \cap E_0).$$

Prosseguindo por indução, obtemos, para todo $k \geq 1$,

$$\mu(F) = \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{k} E_h\right) + \sum_{h=0}^{k} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} E_j\right) \cap E_h\right). \tag{13.1}$$

Como

$$F \setminus E \subset F \setminus \bigcup_{h=0}^{k} E_h,$$

pela monotonicidade,

$$\mu(F \setminus E) \leq \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{k} E_h\right).$$

Substituindo esta estimativa em (13.1), obtemos

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus E) + \sum_{h=0}^{k} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} E_j\right) \cap E_h\right).$$

Fazendo $k \to \infty$,

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus E) + \sum_{h=0}^{\infty} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} E_j\right) \cap E_h\right).$$

Os conjuntos

$$\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} E_j\right) \cap E_h$$

são dois a dois disjuntos e a sua união coincide com $F \cap E$. Pela σ-subaditividade,

$$\mu(F \cap E) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu\left(\left(F \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} E_j\right) \cap E_h\right).$$

Concluímos que

$$\mu(F) \geq \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E).$$

A desigualdade inversa decorre da σ-subaditividade de μ. Assim,

$$\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E), \qquad \forall\, F \subset X,$$

o que mostra que $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Concluímos, portanto, que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra. □

13.6 Medidas positivas

Definição 13.14 (Medida positiva)**.** Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre um conjunto X. Uma aplicação

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

chama-se uma *medida positiva* se satisfaz:

1.
$$\mu(\emptyset) = 0;$$

2. para toda a sucessão $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A segunda propriedade chama-se *σ-aditividade*, ou *aditividade enumerável*.

Nota 13.15 (Aditividade). A σ-aditividade afirma que a medida da união de uma sucessão de conjuntos dois a dois disjuntos é exatamente a soma das suas medidas:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$
Em particular, tomando apenas um número finito de conjuntos não vazios, obtém-se a aditividade finita:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$
Uma medida exterior satisfaz, em geral, apenas a σ-subaditividade,
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$
O teorema seguinte mostra que, ao restringir uma medida exterior à σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis de Carathéodory, obtém-se uma medida positiva.

Definição 13.16 (Medida completa)**.** Uma medida positiva μ diz-se *completa* se, para todo conjunto N mensurável tal que
$$\mu(N) = 0,$$
qualquer subconjunto $A \subset N$ é também mensurável. Nesse caso,
$$\mu(A) = 0.$$

Teorema 13.17 (Carathéodory)**.** *Seja μ^* uma medida exterior em X. Então:*

1. *a coleção $\mathcal{M}_{\mu^*}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra;*
2. *a restrição*
$$\mu := \mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$$
é uma medida positiva completa.

Demonstração. A primeira afirmação foi demonstrada no teorema anterior. Resta mostrar que a restrição
$$\mu := \mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$$

é uma medida positiva completa.

(i) σ-aditividade. Seja $(E_h)_{h\geq 1} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ uma sucessão de conjuntos dois a dois disjuntos. Aplicando a decomposição obtida na demonstração do teorema anterior ao conjunto

$$F = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h,$$

obtém-se

$$\mu^*(E) \geq \sum_{h=1}^{\infty} \mu^*(E_h).$$

Por outro lado, como μ^* é uma medida exterior, $\mu^*(E) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mu^*(E_h)$. Logo,

$$\mu^*(E) = \sum_{h=1}^{\infty} \mu^*(E_h),$$

isto é,

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \mu(E_h).$$

Além disso, $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$, pelo que μ é uma medida positiva.

(ii) Completude. Seja $B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ tal que $\mu(B) = 0$, e seja $A \subset B$. Pela monotonicidade,

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) = 0,$$

logo $\mu^*(A) = 0$. Para qualquer conjunto $F \subset X$, a σ-subaditividade fornece

$$\mu^*(F) \leq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap A^c).$$

Como

$$\mu^*(F \cap A) \leq \mu^*(A) = 0,$$

segue que

$$\mu^*(F) \leq \mu^*(F \cap A^c).$$

A desigualdade inversa resulta da monotonicidade, pois

$$F \cap A^c \subset F.$$

Assim,

$$\mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap A^c),$$

o que mostra que $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Finalmente, $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$. Logo, μ é uma medida completa. □

13.7 Álgebras de conjuntos e pré-medidas

Até agora, as medidas foram definidas em σ-álgebras. No entanto, em muitas situações naturais, é mais simples definir inicialmente uma função de conjuntos numa família mais pequena, designadamente numa álgebra de conjuntos. O problema consiste então em saber se essa função pode ser prolongada a uma medida definida na σ-álgebra gerada pela álgebra inicial. O teorema de extensão de Carathéodory responde afirmativamente a esta questão sob hipóteses muito gerais.

Comecemos por recordar a noção de álgebra de conjuntos.

Definição 13.18 (Álgebra de conjuntos)**.** Seja X um conjunto não vazio. Uma família

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$$

chama-se uma *álgebra de conjuntos* se satisfaz:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$;
3. se $A, B \in \mathcal{A}$, então
$$A \cup B \in \mathcal{A}.$$

Proposição 13.19. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra, então:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A \cap B \in \mathcal{A}$, *para quaisquer* $A, B \in \mathcal{A}$;
3. $\mathcal{A}$ *é estável por diferenças:*
$$A \setminus B \in \mathcal{A};$$
4. $\mathcal{A}$ *é estável por uniões e interseções finitas.*

Demonstração. Como $X \in \mathcal{A}$, segue da estabilidade por complemento que $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$. Além disso, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, pelo que $\mathcal{A}$ é estável por interseção. Finalmente, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$. A estabilidade por uniões e interseções finitas obtém-se por indução. □

Nota 13.20. A única diferença entre uma álgebra e uma σ-álgebra consiste em que uma álgebra apenas é estável por uniões finitas, enquanto uma σ-álgebra é estável por uniões numeráveis.

13.7.1 Pré-medidas

Uma pré-medida é uma medida definida numa álgebra de conjuntos. A diferença relativamente a uma medida reside apenas no facto de o domínio não ser ainda uma σ-álgebra.

Definição 13.21 (Pré-medida)**.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos em X. Uma aplicação

$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

chama-se uma *pré-medida* se:

1. $$\nu(\varnothing) = 0;$$

2. para toda a família $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

tem-se

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Nota 13.22. Como uma álgebra não é, em geral, estável por uniões numeráveis, a condição de σ-aditividade apenas faz sentido quando a união continua a pertencer a $\mathcal{A}$.

Proposição 13.23. *Toda a pré-medida é monótona e finitamente aditiva.*

Demonstração. Se $A, B \in \mathcal{A}$ são disjuntos, então

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B),$$

bastando considerar a sucessão

$$A_1 = A, \qquad A_2 = B, \qquad A_n = \varnothing,\ n \geq 3.$$

Além disso, se $A \subset B$, então $B = A \cup (B \setminus A)$, com união disjunta. Como $B \setminus A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \geq \nu(A),$$

o que demonstra a monotonia. □

Exemplo 13.24. Todo medida definida numa σ-álgebra é, em particular, uma pré-medida na mesma família de conjuntos. Mais geralmente, a restrição de uma medida a uma álgebra continua a ser uma pré-medida.

13.7.2 Construção da medida exterior

A ideia fundamental de Carathéodory consiste em prolongar uma pré-medida definida numa álgebra a uma função definida em todos os subconjuntos de X. Essa função será uma medida exterior.

Definição 13.25 (Medida exterior associada a uma pré-medida)**.** Seja ν uma pré-medida definida numa álgebra $\mathcal{A}$. Para cada conjunto $E \subset X$, define-se

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) : A_n \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

A função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ chama-se a *medida exterior associada à pré-medida* ν.

A quantidade $\mu^*(E)$ representa o menor "custo"possível para cobrir E por conjuntos pertencentes à álgebra $\mathcal{A}$.

Teorema 13.26. *A função μ^* assim definida é uma medida exterior.*

Demonstração. Verificamos as três propriedades.

(i) Conjunto vazio. Como $\varnothing$ é coberto pela família vazia,

$$\mu^*(\varnothing) = 0.$$

(ii) Monotonia. Se $E \subset F$, toda cobertura de F é igualmente uma cobertura de E. Portanto,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F).$$

(iii) σ-subaditividade. Seja $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada k, existe uma cobertura

$$E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k,j}, \qquad A_{k,j} \in \mathcal{A},$$

tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{k,j}) < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

A família $(A_{k,j})_{k,j}$ cobre E. Assim,

$$\mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{k,j}) < \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k),$$

concluindo a demonstração. □

Nota 13.27. A construção anterior é completamente geral: nenhuma estrutura topológica é necessária. Apenas se utiliza a existência de uma pré-medida numa álgebra de conjuntos.

13.7.3 Teorema de extensão de Carathéodory

O resultado seguinte mostra que toda pré-medida pode ser prolongada a uma medida definida na σ-álgebra que ela gera.

Teorema 13.28 (Teorema de extensão de Carathéodory)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos e*

$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

uma pré-medida. Então existe uma medida

$$\mu : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que

$$\mu(A) = \nu(A), \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Além disso, se a pré-medida ν for σ-finita, então essa extensão é única.

Ideia da demonstração. A construção efetua-se em três etapas.

1. A partir da pré-medida ν, constrói-se a medida exterior μ^*.
2. Considera-se a família

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{E \subset X :\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),\ \forall A \subset X\},$$

   que, pelo critério de Carathéodory, constitui uma σ-álgebra.
3. A restrição

$$\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$$

   é uma medida positiva completa e coincide com a pré-medida inicial em $\mathcal{A}$.

A unicidade, no caso σ-finito, segue do teorema π-λ. □

Nota 13.29. O teorema anterior constitui o principal método de construção de medidas em Análise. Em particular, a medida de Lebesgue é obtida aplicando este resultado à pré-medida que associa a cada intervalo o seu comprimento.

Nota 13.30. O teorema de extensão de Carathéodory constitui um dos resultados fundamentais da teoria da medida. Na prática, muitas das medidas utilizadas em Análise são obtidas definindo primeiro uma pré-medida numa família simples de conjuntos (por exemplo, intervalos ou retângulos) e aplicando depois este teorema para a prolongar à σ-álgebra correspondente.
Nos capítulos seguintes aplicaremos este procedimento à construção da medida de Lebesgue e, mais tarde, à construção de medidas de Borel e de Radon associadas a funcionais lineares positivos.

13.8 Espaços de medida e funções mensuráveis

No que segue, (X, Σ, μ) designa um espaço de medida, isto é, Σ é uma σ-álgebra$de subconjuntos de X$ e μ é uma medida positiva em (X, Σ).

Os espaços de medida constituem o enquadramento natural da teoria da integração de Lebesgue. Nesta secção introduzimos algumas propriedades elementares das medidas, bem como a noção de função mensurável, indispensável para definir a integral de Lebesgue.

Proposição 13.31 (Propriedades elementares das medidas)**.** *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então:*

1. *Se $A \subset B$, então*
$$\mu(A) \leq \mu(B).$$
2. *Se $A \subset B$ e $\mu(A) < \infty$, então*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$
3. *Se (E_n) é uma sucessão crescente de conjuntos mensuráveis,*
$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots, \qquad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$
então
$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
4. *Se (E_n) é uma sucessão decrescente de conjuntos mensuráveis,*
$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots, \qquad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$
e $\mu(E_1) < \infty$, então
$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Demonstração. 1. Como
$$B = A \cup (B \setminus A),$$
com união disjunta, pela σ-aditividade,
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

2. Da igualdade anterior,
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$
Como $\mu(A) < \infty$, pode-se subtrair $\mu(A)$ de ambos os membros, obtendo
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. Defina
$$F_1 = E_1, \qquad F_n = E_n \setminus E_{n-1}, \quad n \geq 2.$$
Os conjuntos F_n são dois a dois disjuntos e
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \qquad E_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k.$$
Logo,
$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

4. Considere $F_n = E_1 \setminus E_n$. Então (F_n) é crescente e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 \setminus E.$$

Pela propriedade anterior,

$$\mu(E_1 \setminus E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n).$$

Como $\mu(E_1) < \infty$,

$$\mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n)$$

e

$$\mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \mu(E).$$

Passando ao limite,

$$\mu(E_1) - \mu(E) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

de onde $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

□

13.8.1 Conjuntos nulos e propriedades quase em toda a parte

Definição 13.32 (Conjunto nulo)**.** Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Um conjunto mensurável $N \in \Sigma$ diz-se *nulo* (ou de *medida nula*) se

$$\mu(N) = 0.$$

Nota 13.33. Se a medida μ for completa, então todo subconjunto de um conjunto nulo é mensurável e tem igualmente medida nula.

Definição 13.34 (Propriedade válida quase em toda a parte)**.** Seja $P(x)$ uma propriedade definida para $x \in X$. Diz-se que P é válida *quase em toda a parte* relativamente à medida μ, ou simplesmente μ-q.t.p., se existe um conjunto nulo $N \in \Sigma$ tal que $P(x)$ é verdadeira para todo $x \in X \setminus N$. Equivalentemente, $\mu\big(\{x \in X : P(x) \text{ é falsa}\}\big) = 0$.

Exemplo 13.35. Considere a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

é nula quase em toda a parte, pois o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = \{0\}$ tem medida de Lebesgue nula.

Nota 13.36. Na teoria da integração de Lebesgue, duas funções que coincidem μ-quase em toda a parte possuem o mesmo integral. Por esse motivo, propriedades válidas apenas fora de um conjunto nulo são, em geral, suficientes em Análise.

13.8.2 Funções mensuráveis

Definição 13.37 (Função mensurável)**.** Sejam (X, Σ) e $(Y, \mathcal{N})$ dois espaços mensuráveis.
Uma aplicação

$$f : X \longrightarrow Y$$

diz-se *mensurável* se

$$f^{-1}(E) \in \Sigma, \qquad \forall\, E \in \mathcal{N}.$$

Nota 13.38. A mensurabilidade exprime a compatibilidade da aplicação f com as estruturas mensuráveis dos espaços de partida e de chegada. Em particular, a imagem inversa de qualquer conjunto mensurável permanece mensurável.
Ao contrário da imagem direta, que não preserva em geral a mensurabilidade, a imagem inversa preserva todas as operações de teoria dos conjuntos:

$$f^{-1}(E^c) = \big(f^{-1}(E)\big)^c,$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n),$$

e

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n).$$

Exemplo 13.39. Toda função contínua $f : X \longrightarrow Y$, entre espaços topológicos munidos das respetivas σ-álgebras de Borel, é mensurável.

13.8.3 Medidas de probabilidade

Definição 13.40 (Medida de probabilidade)**.** Uma medida positiva μ definida num espaço mensurável (X, Σ) chama-se uma *medida de probabilidade* se

$$\mu(X) = 1.$$

O triplo (X, Σ, μ) diz-se então um *espaço de probabilidade*.

Exemplo 13.41. Se $X = \{1, \ldots, n\}$ e

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

a aplicação

$$\mu(E) = \sum_{i \in E} p_i, \qquad E \subset X,$$

define uma medida de probabilidade em $(X, \mathcal{P}(X))$. No caso particular em que $p_i = 1/n$ para todo i, obtém-se a medida uniforme sobre X.

Nota 13.42. As medidas de probabilidade desempenham um papel central em Probabilidades e Estatística. Do ponto de vista da teoria da medida, constituem simplesmente um caso particular de medidas positivas finitas.

13.9 Medidas com sinal e medidas vetoriais

Até agora considerámos apenas medidas positivas. Em diversas aplicações é útil permitir que uma medida assuma valores negativos ou, mais geralmente, valores num espaço vetorial. Nesta secção introduzimos estas duas generalizações, cuja estrutura será estudada em maior detalhe nas secções seguintes.

Definição 13.43 (Medida com sinal e medida vetorial)**.** Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma aplicação

$$\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad m \geq 1,$$

diz-se uma *medida* se

1. $$\mu(\varnothing) = 0;$$
2. para toda a família $(A_n)_{n \geq 1} \subset \Sigma$ de conjuntos dois a dois disjuntos,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$
onde a série converge em $\mathbb{R}^m$.

Quando $m = 1$, a medida diz-se uma *medida com sinal*. Quando $m > 1$, diz-se uma *medida vetorial*.

Nota 13.44. Ao contrário das medidas positivas, uma medida com sinal pode assumir valores positivos, negativos ou nulos. As medidas vetoriais constituem uma generalização natural das medidas com sinal, substituindo os valores reais por vetores de $\mathbb{R}^m$.

13.10 Variação total

A variação total permite associar a uma medida com sinal ou vetorial uma medida positiva que quantifica a sua "massa"total.

Definição 13.45 (Variação total)**.** Seja $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma medida vetorial. A *variação total* de μ é a aplicação

$$|\mu| : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$$

definida por

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\mu(A_j)\| : (A_j)_{j\geq 1} \text{ é uma partição mensurável de } A \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições mensuráveis $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, com os conjuntos A_j dois a dois disjuntos.

Proposição 13.46. *Para todo $A \in \Sigma$,*

$$\|\mu(A)\| \leq |\mu|(A).$$

Demonstração. Basta considerar, na definição da variação total, a partição trivial $A = A$. Como esta partição é admissível, $|\mu|(A) \geq \|\mu(A)\|$. □

Teorema 13.47. *A variação total de uma medida vetorial é uma medida positiva.*

Demonstração. A demonstração será apresentada mais adiante, após o estudo das propriedades das medidas com sinal. □

Nota 13.48. No caso de uma medida positiva, $|\mu| = \mu$. Assim, a variação total generaliza naturalmente a noção de medida positiva às medidas com sinal e às medidas vetoriais.

Definição 13.49 (Medida com sinal e medida vetorial)**.** Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma aplicação $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\quad m \geq 1$, diz-se uma *medida vetorial* se satisfaz:

1. $$\mu(\varnothing) = 0;$$
2. para toda a sucessão $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Sigma$ de conjuntos dois a dois disjuntos,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$
onde a série converge em $\mathbb{R}^m$.

No caso particular em que $m = 1$, a medida diz-se uma *medida com sinal*.

Nota 13.50. Toda medida positiva é uma medida com sinal. As medidas com sinal constituem, por sua vez, um caso particular das medidas vetoriais.

Exemplo 13.51. Se $\mu_1, \ldots, \mu_m$ são medidas com sinal em (X, Σ), então a aplicação

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é uma medida vetorial. Reciprocamente, toda medida vetorial pode ser escrita desta forma.

Definição 13.52 (Medida com sinal e medida vetorial)**.** Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma aplicação $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1$, diz-se uma *medida vetorial* se satisfaz:

1. $$\mu(\varnothing) = 0;$$
2. para toda a sucessão $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Sigma$ de conjuntos dois a dois disjuntos,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$
onde a série converge em $\mathbb{R}^m$.

No caso particular em que $m = 1$, a medida diz-se uma *medida com sinal*.

Nota 13.53. Toda medida positiva é uma medida com sinal. As medidas com sinal constituem, por sua vez, um caso particular das medidas vetoriais.

Exemplo 13.54. Se $\mu_1, \ldots, \mu_m$ são medidas com sinal em (X, Σ), então a aplicação $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma medida vetorial. Reciprocamente, toda medida vetorial pode ser escrita desta forma.

13.11 Decomposição de Jordan

A decomposição de Jordan mostra que toda medida com sinal pode ser escrita, de forma única, como a diferença de duas medidas positivas mutuamente singulares.

Teorema 13.55 (Decomposição de Jordan)**.** *Seja $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ uma medida com sinal tal que $|\mu|(X) < \infty$. Então existem duas medidas positivas finitas $\mu^+, \mu^- : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty)$ tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$, e $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Além disso, esta decomposição é única.*

Definição 13.56 (Partes positiva e negativa)**.** As medidas

$$\mu^+ \quad \text{e} \quad \mu^-$$

chamam-se, respetivamente, a *parte positiva* e a *parte negativa* da medida μ.

Nota 13.57. A unicidade significa que, se $\mu = \nu^+ - \nu^-$, com $|\mu| = \nu^+ + \nu^-$, onde ν^+ e ν^- são medidas positivas, então

$$\nu^+ = \mu^+, \qquad \nu^- = \mu^-.$$

Exercício 89 (D)

Demonstrar a unicidade da decomposição de Jordan.

13.12 Exemplos fundamentais de medidas

Exemplo 13.58 (Medida de Dirac)**.** Para cada $x \in X$, define-se a *medida de Dirac* em x por

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \qquad E \in \Sigma.$$

É imediato verificar que δ_x é uma medida de probabilidade.

Exemplo 13.59 (Medida de contagem)**.** A medida de contagem num conjunto X é definida por

$$\#(E) = \begin{cases} \text{card}(E), & \text{se } E \text{ é finito}, \\ +\infty, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Trata-se de uma medida positiva definida em $\mathcal{P}(X)$.

Nota 13.60. A medida de Dirac representa uma massa concentrada num único ponto, enquanto a medida de contagem atribui a cada conjunto o número dos seus elementos. Ambas desempenham um papel fundamental em Probabilidades, Análise Funcional e Equações Diferenciais.

Exemplo 13.61 (Medidas puramente atómicas)**.** Seja $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ uma sucessão de pontos distintos e seja $(c_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ uma sucessão tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

A aplicação

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \delta_{x_n},$$

definida por

$$\mu(E) = \sum_{x_n \in E} c_n, \qquad E \in \Sigma,$$

é uma medida com sinal. Se $c_n \geq 0$ para todo n, então μ é uma medida positiva. Mais geralmente, se $c_n \in \mathbb{R}^m$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\| < \infty,$$

obtém-se uma medida vetorial dada por

$$\mu(E) = \sum_{x_n \in E} c_n.$$

As medidas desta forma chamam-se *medidas puramente atómicas*.

Definição 13.62 (Átomo de uma medida)**.** Seja μ uma medida positiva em (X, Σ). Um conjunto mensurável $A \in \Sigma$ diz-se um *átomo* de μ se

$$\mu(A) > 0$$

e, para todo conjunto mensurável $B \subset A$,

$$\mu(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(B) = \mu(A).$$

Nota 13.63. Quando todos os conjuntos singulares $\{x\}$ são mensuráveis, um ponto $x \in X$ é um átomo se e somente se

$$\mu(\{x\}) > 0.$$

Neste caso, o conjunto dos átomos é frequentemente identificado com

$$S_\mu = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Se μ é finita ou σ-finita, então S_μ é no máximo numerável.

Exemplo 13.64 (Medida imagem)**.** Sejam (X, Σ, μ) e $(Y, \mathcal{T})$ dois espaços de medida e seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação mensurável. Define-se a *medida imagem* (ou *push-forward*) de μ por f como a medida

$$f_{\#}\mu : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$$

dada por

$$(f_{\#}\mu)(E) = \mu\big(f^{-1}(E)\big), \qquad E \in \mathcal{T}.$$

A mensurabilidade de f garante que $f^{-1}(E) \in \Sigma$, pelo que a definição faz sentido.

Exemplo 13.65. Seja $X = \mathbb{R}$, munido da medida de Lebesgue λ, e considere a aplicação $f(x) = x^2$. A medida imagem $f_{\#}\lambda$ é definida por

$$(f_{\#}\lambda)(E) = \lambda\big(\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in E\}\big),$$

para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}$. Esta medida descreve a distribuição da variável aleatória x^2 quando x está distribuído segundo a medida de Lebesgue.

Nota 13.66. A medida imagem desempenha um papel fundamental em Probabilidades, na teoria do transporte ótimo e na fórmula de mudança de variáveis para integrais.

Nota 13.67. A medida imagem pode igualmente ser escrita sob a forma

$$(f_{\#}\mu)(E) = \int_X \delta_{f(x)}(E)\, d\mu(x), \qquad E \in \mathcal{T},$$

onde $\delta_{f(x)}$ denota a medida de Dirac concentrada no ponto $f(x)$. Com efeito,

$$\delta_{f(x)}(E) = \chi_E(f(x)),$$

pelo que

$$\int_X \delta_{f(x)}(E)\, d\mu(x) = \int_X \chi_E(f(x))\, d\mu(x) = \mu\big(f^{-1}(E)\big) = (f_{\#}\mu)(E).$$

Esta representação mostra que a medida imagem pode ser interpretada como uma superposição contínua de medidas de Dirac transportadas pela aplicação f.

Exercício 90 (D)

Seja $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e μ a medida de contagem

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1.$$

Seja $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Mostrar que f é mensurável e que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Sugestão. Usar a fórmula de Cavalieri,

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_0^\infty \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > t\}\big)\, dt.$$

Exercício 91 (F)

Mostre que, se $A \subset B$, então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, sempre que $\mu(A) < \infty$.

Exercício 92 (M)

Se $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < \infty$, mostrar que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n).$$

Exercício 93 (F)

Mostrar que todo aberto em um espaço métrico é uma união numerável de conjuntos fechados.

13.13 Completamento de uma medida

Pelo teorema de Carathéodory, a medida obtida a partir de uma medida exterior é automaticamente completa. No entanto, um espaço de medida arbitrário pode não ser completo. O resultado seguinte mostra que qualquer medida admite uma completização canónica.

Teorema 13.68 (Completamento de uma medida)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Definamos*

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup M : \ A \in \mathcal{A},\ M \subset N,\ N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0\},$$

e

$$\overline{\mu}(A \cup M) := \mu(A).$$

Então:

1. *$(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ é um espaço de medida completo;*
2. *$\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$;*
3. *$\overline{\mu}$ estende μ;*
4. *se $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ é outro completamento de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, então existe um único isomorfismo de espaços de medida entre os dois completamentos que restringe à identidade em $\mathcal{A}$. Em particular, o completamento é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Mostremos primeiro que $\overline{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra. Seja $E = A \cup M \in \overline{\mathcal{A}}$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $M \subset N$, com $N \in \mathcal{A}$ e $\mu(N) = 0$. Então

$$E^c = (A^c \cap N^c) \cup (A^c \cap (N \setminus M)).$$

O primeiro conjunto pertence a $\mathcal{A}$ e o segundo está contido em N. Logo, $E^c \in \overline{\mathcal{A}}$. Se agora $E_i = A_i \cup M_i \in \overline{\mathcal{A}}$, com $M_i \subset N_i$ e $\mu(N_i) = 0$, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right).$$

Como $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ e

$$\bigcup_i M_i \subset \bigcup_i N_i, \qquad \mu\left(\bigcup_i N_i\right) = 0,$$

segue que $\bigcup_i E_i \in \overline{\mathcal{A}}$. Assim, $\overline{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra. A aplicação

$$\overline{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$$

está bem definida, pois se $A \cup M = A' \cup M'$, então $A \triangle A'$ está contido na união de dois conjuntos de medida nula, pelo que $\mu(A) = \mu(A')$. A σ-aditividade de $\overline{\mu}$ decorre imediatamente da σ-aditividade de μ, e é claro que $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Finalmente, se $E = A \cup M \in \overline{\mathcal{A}}$ e $\overline{\mu}(E) = 0$, então $\mu(A) = 0$. Logo, $E \subset A \cup N$, onde $A \cup N$ é um conjunto mensurável de medida nula. Qualquer subconjunto de E pertence, portanto, a $\overline{\mathcal{A}}$ e tem medida nula. Assim, $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ é completo. A unicidade do completamento é imediata: qualquer outro completamento identifica os mesmos subconjuntos dos conjuntos de medida nula, pelo que coincide com $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ a menos de isomorfismo. □

Nota 13.69. A completização de uma medida consiste precisamente em acrescentar à σ-álgebra todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula, sem alterar o valor da medida nos conjuntos originalmente mensuráveis.

Nota 13.70 (Decomposição canónica). Seja μ^* uma medida exterior em X, e seja $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis. A restrição $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ é uma medida completa em $(X, \mathcal{M}_{\mu^*})$. Em particular, a sua completização coincide com a própria medida. Consequentemente, todo conjunto $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ admite uma decomposição da forma

$$E = B \cup M,$$

onde $B \in \mathcal{B}(X)$, $M \subset N$, $N \in \mathcal{B}(X)$ e $\mu(N) = 0$. Equivalentemente, M é um subconjunto de um conjunto de Borel de medida nula. Assim, todo conjunto μ^*-mensurável difere de um conjunto de Borel apenas por um subconjunto de um conjunto de medida nula.

Nota histórica

A teoria moderna da medida desenvolveu-se no final do século XIX e no início do século XX, em resposta às limitações das noções clássicas de comprimento, área e integração. Os trabalhos de Émile Borel [9] e Henri Lebesgue [45, 46] introduziram as primeiras estruturas sistemáticas de conjuntos mensuráveis e de medidas, enquanto Constantin Carathéodory [16] estabeleceu uma construção abstrata baseada em medidas exteriores e num critério intrínseco de mensurabilidade. A decomposição de medidas com sinal prolonga, ao nível das medidas, a decomposição de Jordan para funções de variação limitada. A teoria foi posteriormente completada pelos resultados de Hahn [**?**, 36], Radon [63] e Nikodým [61], que desempenham hoje um papel central na Análise Funcional, na Probabilidade e no Cálculo das Variações.

Nota bibliográfica

Para uma introdução clássica aos fundamentos da Teoria da Medida, incluindo medidas exteriores, o teorema de extensão de Carathéodory, o completamento de medidas e as medidas com sinal, recomendam-se *Measure Theory*, de Paul R. Halmos [36], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], e *Measure Theory*, de Donald L.

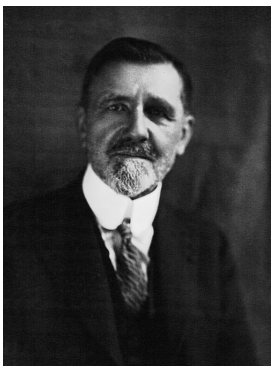
Cohn [18]. Uma exposição mais extensa e sistemática encontra-se em *Measure Theory*, de Vladimir I. Bogachev [8]. Para uma apresentação orientada para a Análise Geométrica e o Cálculo das Variações, podem consultar-se *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, de Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara [2], e *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*, de Francesco Maggi [51].

Capítulo 14

Medidas de Borel e construção das medidas de Radon

As medidas de Borel constituem a classe natural de medidas em espaços topológicos. Neste capítulo estudamos um critério de mensurabilidade devido a Carathéodory e mostramos como um funcional linear positivo sobre $\mathcal{C}_0(X)$ dá origem a uma medida de Radon.

14.1 Medidas de Borel positivas



Émile Borel
(1871–1956)

Definição 14.1 (Medida de Borel positiva)**.** Seja X um espaço topológico. Uma medida exterior μ em X diz-se uma *medida de Borel positiva* se

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu(X),$$

isto é, se todo conjunto de Borel é μ-mensurável.

Nota 14.2. Pela decomposição canónica estabelecida no capítulo anterior, todo conjunto μ-mensurável difere de um conjunto de Borel apenas por um subconjunto de um conjunto de medida nula.

Critério de mensurabilidade de Carathéodory

Teorema 14.3 (Critério de separação)**.** *Uma medida exterior μ no espaço métrico X é uma medida de Borel se e somente se, para quaisquer conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0,$$

se verifica

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Demonstração. **Passo 1.** Suponhamos que μ é uma medida de Borel e sejam $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0.$$

Como E_1 é um conjunto de Borel, é μ-mensurável. Aplicando o critério de Carathéodory ao conjunto E_1 e ao conjunto $E_1 \cup E_2$, obtemos

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu((E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu((E_1 \cup E_2) \setminus E_1).$$

Como $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, segue que

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2). \tag{14.1}$$

Passo 2. Reciprocamente, suponhamos válida a propriedade (14.1). Basta mostrar que todo conjunto fechado é μ-mensurável. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Pretendemos provar que, para todo $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\mu(F) < \infty$,

$$\mu(F) \geq \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E).$$

Para $h \geq 1$, definimos

$$E_h = \left\{ x \in F : \frac{1}{h+1} \leq \operatorname{dist}(x, E) < \frac{1}{h} \right\},$$

e

$$E_0 = \{x \in F : \operatorname{dist}(x, E) \geq 1\}.$$

Então $(E_h)_{h \geq 0}$ é uma partição de $F \setminus E$. Aplicando iterativamente a propriedade $(\star)$ aos conjuntos E e E_h, que estão a distância positiva, obtemos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mu(F) \geq \mu(E \cap F) + \sum_{h=0}^{N} \mu(E_h).$$

Fazendo $N \to \infty$ e usando que os conjuntos E_h são disjuntos, bem como a σ-subaditividade de μ, concluímos que

$$\mu(F) \geq \mu(E \cap F) + \mu(F \setminus E),$$

o que demonstra que E é μ-mensurável. Como os conjuntos fechados geram a σ-álgebra de Borel, conclui-se que μ é uma medida de Borel. □

14.2 Construção da medida de Radon *à la* Carathéodory

Ao longo desta secção, X designa um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Seja $0 \leq u \in (\mathcal{C}_0(X))'$. Para cada aberto $U \subset X$, define-se a pré-medida

$$\mu_u(U) = \sup\{u(f) : 0 \leq f \leq 1,\ f \in \mathcal{C}_0(X),\ \mathrm{spt}(f) \subset U\}.$$

A medida exterior associada é dada por

$$\mu_u^*(E) = \inf\{\mu_u(U) : U \supset E,\ U \text{ aberto}\}.$$

Lema 14.4 (Finitude da medida exterior)**.** *A medida exterior μ_u^* é finita.*

Demonstração. Como u é positivo, $0 \leq u(f) \leq \|u\|_\infty \|f\|_\infty$. Como $\|f\|_\infty \leq 1$, obtemos $u(f) \leq \|u\|_\infty$. Portanto,

$$\mu_u(X) \leq \|u\|_\infty < \infty.$$

Consequentemente, para todo $E \subset X$,

$$\mu_u^*(E) \leq \mu_u(X) \leq \|u\|.$$

□

Nota 14.5. Se substituirmos $\mathcal{C}_0(X)$ por $\mathcal{C}_c(X)$ na definição de μ_u, a finitude deixa de ser válida, pois a norma em $\mathcal{C}_c(X)$ não é apenas a norma do supremo, a não ser que nos limitemos, à partida, a um compacto de X.

Lema 14.6 (Aditividade finita da pré-medida)**.** *Sejam $U_1, \ldots, U_n \subset X$ abertos dois a dois disjuntos. Então,*

$$\mu_u\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_u(U_i).$$

Demonstração. Primeiro provamos a desigualdade "$\geq$". Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja

$$f_i \in \mathcal{C}_0(X), \qquad 0 \leq f_i \leq 1, \qquad \mathrm{spt}(f_i) \subset U_i.$$

Como os conjuntos U_i são disjuntos, temos

$$f := \sum_{i=1}^n f_i \in \mathcal{C}_0(X), \qquad 0 \leq f \leq 1, \qquad \mathrm{spt}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Pela linearidade e positividade de u,

$$u(f) = \sum_{i=1}^n u(f_i) \leq \mu_u\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções admissíveis f_i, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \mu_u(U_i) \leq \mu_u\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right).$$

Provemos agora a desigualdade "$\leq$". Seja

$$f \in \mathcal{C}_0(X), \qquad 0 \leq f \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Como os conjuntos U_i são abertos e disjuntos, existe uma partição da unidade $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C}_0(X)$ tal que

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(\varphi_i) \subset U_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1 \quad \text{em } \operatorname{spt}(f).$$

Definindo $f_i := f\varphi_i$, temos

$$0 \leq f_i \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(f_i) \subset U_i,$$

e ainda $f = \sum_{i=1}^n f_i$. Pela linearidade de u,

$$u(f) = \sum_{i=1}^{n} u(f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_u(U_i).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções admissíveis f, obtemos

$$\mu_u\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_u(U_i).$$

Combinando as duas desigualdades, concluímos a igualdade. □

Nota 14.7. A σ-aditividade também é válida, mas apenas necessitaremos da aditividade finita na demonstração seguinte.

Proposição 14.8. *Todo aberto $U \subset X$ é μ_u^*-mensurável e*

$$\mu_u^*(U) = \mu_u(U).$$

Demonstração. A desigualdade

$$\mu_u^*(A) \leq \mu_u^*(A \cap U) + \mu_u^*(A \cap U^c)$$

segue da subaditividade. Para a desigualdade oposta, seja $\varepsilon > 0$ e escolha um aberto $V \supset A$ tal que

$$\mu_u(V) \leq \mu_u^*(A) + \varepsilon.$$

Como

$$V = (V \cap U) \cup (V \cap U^c),$$

com união disjunta, pela aditividade finita de μ_u em abertos,

$$\mu_u(V) = \mu_u(V \cap U) + \mu_u(V \cap U^c).$$

Além disso, pela monotonicidade de μ_u^*,

$$\mu_u^*(A \cap U) \leq \mu_u(V \cap U), \qquad \mu_u^*(A \cap U^c) \leq \mu_u(V \cap U^c).$$

Logo,

$$\mu_u^*(A \cap U) + \mu_u^*(A \cap U^c) \leq \mu_u(V) \leq \mu_u^*(A) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\mu_u^*(A \cap U) + \mu_u^*(A \cap U^c) \leq \mu_u^*(A).$$

Conclui-se que U é μ_u^*-mensurável e, pela definição de μ_u^*, $\mu_u^*(U) = \mu_u(U)$. □

Proposição 14.9 (Medidas de Borel positivas associadas a funcionais positivos)**.** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e seja $0 \leq u \in (\mathcal{C}_0(X))'$. Então,*

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu_u^*}(X).$$

Em particular, a restrição de μ_u^* à σ-álgebra de Borel define uma medida de Borel positiva.

Demonstração. Pela proposição anterior, todo aberto $U \subset X$ é μ_u^*-mensurável. Como os conjuntos μ_u^*-mensuráveis formam uma σ-álgebra, conclui-se que esta contém a σ-álgebra gerada pelos abertos, isto é,

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu_u^*}(X).$$

A restrição de uma medida exterior aos seus conjuntos mensuráveis é uma medida. Assim, $\mu_u^*|_{\mathcal{B}(X)}$ é uma medida de Borel positiva. □

Nota 14.10. A construção anterior aplica-se inicialmente a funcionais positivos. Para um funcional linear contínuo arbitrário, utiliza-se a decomposição de Jordan

$$u = u^+ - u^-,$$

estabelecida no Teorema 3.65 da Parte I, e aplica-se a construção separadamente aos funcionais positivos u^+ e u^-. A hipótese de continuidade (ou limitação) serve apenas para garantir que a norma do supremo esteja bem definida. Recorde-se ainda que, no Exercício 33, foi demonstrado que todo funcional linear positivo é automaticamente limitado.

Doravante, denotaremos por

$$\mu := \mu_u^*|_{\mathcal{B}(X)}$$

a medida de Borel positiva associada ao funcional positivo u. Pelo Lema 14.4,

$$\mu(X) < \infty.$$

Corolário 14.11. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e $u \in (\mathcal{C}_0(X))'$. Então u define uma medida de Borel com sinal.*

Demonstração. Como u é linear, é aditivo. Como é contínuo, é limitado. Pela Proposição 3.62 da Parte I, u pode escrever-se como diferença de dois funcionais positivos. Aplicando a construção anterior a cada uma das partes positiva e negativa, obtemos duas medidas de Borel positivas finitas. A sua diferença define uma medida de Borel com sinal associada a u. □

14.3 Regularidade das medidas de Borel

As propriedades de regularidade estabelecem uma ligação entre a estrutura topológica do espaço e a medida. O seu objetivo é aproximar conjuntos mensuráveis por conjuntos abertos, fechados ou compactos, permitindo controlar simultaneamente a estrutura topológica e o comportamento da medida. Estas propriedades desempenham um papel fundamental na teoria das medidas de Radon e no Teorema da Representação de Riesz.

Ao longo desta secção, seja X um espaço topológico e seja μ uma medida de Borel em X.

Definição 14.12 (Regularidade exterior)**.** Dizemos que μ é *exterior regular* em $E \subset X$ se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Definição 14.13 (Regularidade interior (estreita))**.** Dizemos que μ é *interior regular* (ou *estreita*) em $E \subset X$ se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Definição 14.14 (Regularidade de conjuntos)**.** Seja X um espaço topológico.
Um conjunto $E \subset X$ diz-se *Borel-regular* (relativamente à medida μ) se μ for simultaneamente interior e exterior regular em E.
Dizemos igualmente que μ é *Borel-regular* no conjunto E se for simultaneamente interior e exterior regular em E.

Definição 14.15 (Medida de Borel regular)**.** Dizemos que uma medida de Borel μ é *regular* se, para todo subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, existe um conjunto de Borel E tal que

$$F \subset E, \qquad \mu(E) = \mu(F).$$

O resultado seguinte mostra que a regularidade interior se preserva ao passar dos conjuntos de Borel para os conjuntos mensuráveis da completização.

Lema 14.16. *Seja μ uma medida de Borel interior-regular nos conjuntos de Borel. Considere a completização do espaço de medida*

$$(X, \mathcal{B}(X), \mu),$$

que denotaremos por

$$(X, \mathcal{M}_\mu, \mu).$$

Então μ é interior-regular em todos os conjuntos mensuráveis.

Demonstração. Pela decomposição canónica de uma medida completa, para todo conjunto mensurável $E \subset X$, existe um conjunto de Borel $B \subset X$ e um conjunto nulo $N \subset X$ tais que

$$E = B \cup N, \qquad B \cap N = \varnothing, \qquad \mu(N) = 0.$$

Pela aditividade da medida, $\mu(E) = \mu(B)$. Como μ é interior-regular nos conjuntos de Borel,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\ K \text{ compacto}\}.$$

Como todo compacto $K \subset B$ satisfaz $K \subset E$, segue que

$$\mu(E) \leq \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Por outro lado, todo compacto $K \subset E$ satisfaz

$$K = (K \cap B) \cup (K \cap N).$$

Como $K \cap B$ é compacto e $\mu(K \cap N) = 0$, obtemos

$$\mu(K) = \mu(K \cap B) \leq \mu(B) = \mu(E).$$

Tomando o supremo sobre todos os compactos contidos em E, concluímos que

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \leq \mu(E).$$

Logo,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\},$$

isto é, μ é interior-regular nos conjuntos mensuráveis. □

14.3.1 Regularidade em espaços métricos

Em espaços métricos, toda medida de Borel é interior-regular em abertos de medida finita, relativamente aos conjuntos fechados.

Lema 14.17 (Interior-regularidade em abertos por fechados)**.** *Seja X um espaço métrico e μ uma medida de Borel em X. Então, para todo aberto $U \subset X$ tal que $\mu(U) < \infty$,*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \textit{ fechado}\}.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_n = \{x \in U : d(x, X \setminus U) \geq 1/n\}.$$

Então F_n é fechado, $F_n \subset U$ e $F_n \uparrow U$. Com efeito, se $x \in U$, então $d(x, X \setminus U) > 0$, pelo que existe n tal que $x \in F_n$. Pela continuidade da medida por baixo, $\mu(F_n) \uparrow \mu(U)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe n tal que

$$\mu(F_n) > \mu(U) - \varepsilon.$$

Tomando $F = F_n$, obtemos um conjunto fechado $F \subset U$ satisfazendo

$$\mu(F) > \mu(U) - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\mu(U) \leq \sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \text{ fechado}\}.$$

A desigualdade inversa decorre da monotonicidade da medida, pois $\mu(F) \leq \mu(U)$ para todo fechado $F \subset U$. Portanto,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \text{ fechado}\}.$$

□

Nota 14.18. O resultado permanece válido se U for um conjunto de Borel e μ for localmente finita, isto é, finita em todos os compactos.

Se a medida de Borel for finita, então todo conjunto de Borel é regular.

Lema 14.19 (Regularidade dos conjuntos de Borel para medidas finitas)**.** *Seja X um espaço métrico e μ uma medida de Borel finita. Então, para todo conjunto de Borel $E \subset X$,*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E,\ F \text{ fechado}\} = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Em particular, μ é regular em todos os conjuntos de Borel.

Demonstração. Seja Σ a classe dos conjuntos de Borel que satisfazem simultaneamente as duas igualdades de aproximação. Mostremos primeiro que todo fechado pertence a Σ. Se A é fechado, então

$$\sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ fechado}\} = \mu(A),$$

bastando tomar $F = A$. Por outro lado, existe uma sucessão decrescente de abertos (U_n) tal que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Como μ é finita, pela continuidade da medida por cima,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \inf_n \mu(U_n).$$

Logo, todo fechado pertence a Σ. Como tomar complementos troca conjuntos fechados por abertos, supremos por ínfimos e vice-versa, conclui-se que todos os abertos pertencem igualmente a Σ. Finalmente, verifica-se que Σ é uma σ-álgebra. Como contém todos os abertos, contém a σ-álgebra de Borel. Assim, todo conjunto de Borel pertence a Σ, concluindo a demonstração. □

14.3.2 Interior regularidade por compactos

Em espaços localmente compactos, os conjuntos fechados da proposição anterior podem ser substituídos por conjuntos compactos. Demonstremos primeiro o resultado em espaços de Haudorff localmente compactos e σ-compactos.

Lema 14.20 (Interior-regularidade por compactos)**.** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e σ-compacto. Suponhamos que uma medida de Borel μ seja interior-regular nos abertos por conjuntos fechados, isto é, que, para todo aberto $U \subset X$ com $\mu(U) < \infty$,*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \text{ fechado}\}.$$

Então μ é interior-regular nos abertos de medida finita por conjuntos compactos. Mais precisamente, para todo aberto $U \subset X$ com $\mu(U) < \infty$ e todo $\varepsilon > 0$, existe um

compacto $K \subset U$ tal que
$$\mu(K) > \mu(U) - \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $U \subset X$ aberto, com $\mu(U) < \infty$, e seja $\varepsilon > 0$. Pela hipótese de regularidade interior por conjuntos fechados, existe um fechado $F \subset U$ tal que

$$\mu(F) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como X é σ-compacto, existe uma sucessão crescente de compactos (cf. Proposição 2.36) (K_n) tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Consequentemente,

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap K_n),$$

e cada conjunto $F \cap K_n$ é compacto, pois é fechado no compacto K_n. Pela continuidade da medida por baixo, $\mu(F \cap K_n) \uparrow \mu(F)$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(F \cap K_n) > \mu(F) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definindo $K := F \cap K_n$, temos que K é compacto, $K \subset U$, e

$$\mu(K) > \mu(F) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(U) - \varepsilon.$$

□

Nota 14.21. A hipótese de separabilidade intervém apenas para garantir a existência de uma família numerável de compactos cuja união seja um aberto dado. Com efeito, todo espaço métrico separável e localmente compacto é σ-compacto. Consequentemente, se $U \subset X$ é aberto, existe uma sucessão crescente de compactos

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U, \qquad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Pela continuidade crescente da medida,

$$\mu(U) = \lim_{n \to \infty} \mu(K_n) = \sup_n \mu(K_n).$$

Na realidade, a separabilidade não é essencial. Basta supor que X é σ-compacto, hipótese que assegura igualmente a existência de exaustões numeráveis por compactos (cf. Teorema 2.36).

Nota 14.22. A hipótese de compacidade local garante que cada ponto de um aberto possui uma vizinhança relativamente compacta. Assim, para todo aberto U e todo $x \in U$, existe um compacto K_x tal que $x \in K_x \subset U$. É esta propriedade que permite aproximar os abertos por compactos. A separabilidade (ou, mais geralmente, a σ-compacidade) intervém apenas para extrair uma família numerável desses compactos.

Proposição 14.23 (Interior-regularidade por compactos)**.** *Seja X um espaço métrico, separável e localmente compacto. Seja μ uma medida de Borel em X. Então, para todo aberto $U \subset X$ tal que $\mu(U) < \infty$,*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \text{ fechado}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\}.$$

Se, além disso, μ for finita nos compactos, então as igualdades anteriores permanecem válidas para todo aberto $U \subset X$, mesmo quando $\mu(U) = \infty$.

Demonstração. Suponhamos primeiro que $\mu(U) < \infty$. A primeira igualdade resulta do Lema 14.17, enquanto a segunda segue do Lema 14.20. Suponhamos agora que $\mu(U) = \infty$ e que μ é finita nos compactos. Seja (K_n) a sucessão fornecida pela Proposição 2.36 e ponhamos $V_n := \text{int}(K_n)$.. Definindo $U_n := U \cap V_n$, temos que U_n é aberto, relativamente compacto, $U_n \uparrow U$, e $\mu(U_n) \leq \mu(\overline{V_n}) < \infty$. Aplicando o primeiro caso a cada U_n,

$$\mu(U_n) = \sup\{\mu(K) : K \subset U_n,\ K \text{ compacto}\}.$$

Como $\mu(U_n) \uparrow \mu(U) = \infty$, segue que

$$\sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\} = \infty = \mu(U).$$

Uma vez que todo compacto é fechado, conclui-se igualmente que

$$\sup\{\mu(F) : F \subset U,\ F \text{ fechado}\} = \mu(U).$$

□

14.3.3 Regularidade das medidas de probabilidade

Uma medida de probabilidade num espaço métrico é finita, pois $\mu(X) = 1$. Consequentemente, pelo lema anterior, é interior-regular por conjuntos fechados e exterior-regular em todos os conjuntos de Borel.

Corolário 14.24 (Regularidade das medidas de probabilidade)**.** *Seja X um espaço métrico e μ uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}(X)$. Então, para todo conjunto de Borel $E \subset X$,*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E,\ F \text{ fechado}\} = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Demonstração. Como $\mu(X) = 1$, a medida μ é finita. O resultado segue diretamente do lema anterior. □

14.3.4 Exterior-regularidade implica regularidade nos conjuntos mensuráveis

Corolário 14.25 (Regularidade nos conjuntos mensuráveis)**.** *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ-compacto. Seja μ uma medida de Borel exterior-regular e finita nos compactos. Então μ é regular em todos os conjuntos mensuráveis σ-finitos. Mais precisamente, para todo conjunto mensurável e σ-finito $E \subset X$,*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Demonstração. A segunda igualdade resulta diretamente da hipótese de regularidade exterior. Resta demonstrar a regularidade interior por conjuntos compactos.

Caso 1. Suponhamos que $\mu(E) < \infty$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela regularidade exterior, existe um aberto $U \supset E$ tal que

$$\mu(U) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como E é mensurável e $E \subset U$, segue que

$$\mu(U \setminus E) = \mu(U) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pela regularidade interior dos abertos por conjuntos compactos, existe um compacto $K \subset U$ tal que

$$\mu(K) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aplicando novamente a regularidade exterior ao conjunto mensurável $U \setminus E$, existe um aberto $V \supset U \setminus E$ tal que

$$\mu(V) < \mu(U \setminus E) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Definamos $L := K \setminus V$. Como V é aberto, L é fechado no compacto K e, portanto, é compacto. Além disso, como $K \subset U$ e $V \supset U \setminus E$, temos $L \subset E$. Por outro lado,

$$\mu(L) = \mu(K \setminus V) \geq \mu(K) - \mu(V) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2\varepsilon}{3} = \mu(U) - \varepsilon \geq \mu(E) - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Por monotonicidade, tem-se

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \leq \mu(E).$$

Por outro lado, acabámos de mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $L \subset E$ tal que

$$\mu(L) > \mu(E) - \varepsilon.$$

Logo,

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} \geq \mu(E) - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \downarrow 0$, obtemos a desigualdade inversa, concluindo que

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Caso 2. Suponhamos que $\mu(E) = \infty$ e que E é σ-finito. Existe então uma sucessão crescente de conjuntos mensuráveis (E_j) tal que

$$E_j \uparrow E \qquad \text{e} \qquad \mu(E_j) < \infty$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela continuidade da medida por baixo, $\mu(E_j) \uparrow \mu(E) = \infty$. Seja $M > 0$. Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_j) > M + 1$. Pelo caso anterior, existe um compacto $K \subset E_j$ tal que $\mu(K) > \mu(E_j) - 1 > M$. Como $K \subset E_j \subset E$ e $M > 0$ é arbitrário, segue que

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\} = \infty = \mu(E).$$

Assim, μ é interior-regular por conjuntos compactos em todos os conjuntos mensuráveis σ-finitos. □

Nota 14.26. A hipótese de σ-finitude é necessária apenas para tratar conjuntos mensuráveis de medida infinita. Todo conjunto mensurável de medida finita é automaticamente regular nas condições do corolário.

Nota histórica

A teoria da regularidade das medidas desenvolveu-se progressivamente ao longo da primeira metade do século XX. Os conjuntos de Borel foram introduzidos por Émile Borel [9] no contexto da teoria da medida e da integração, enquanto Constantin Carathéodory estabeleceu o critério abstrato de mensurabilidade que permite construir medidas a partir de medidas exteriores. A noção de medida de Radon foi introduzida por Johann Radon em 1913 [63] para representar funcionais lineares positivos sobre espaços de funções contínuas de suporte compacto. Pouco depois, Frigyes Riesz [64]demonstrou o célebre teorema de representação que identifica tais funcionais com medidas de Radon, estabelecendo uma profunda ligação entre Análise Funcional, Topologia e Teoria da Medida. As propriedades de regularidade interior e exterior desempenham hoje um papel central em diversas áreas da Matemática, nomeadamente na teoria do potencial, na análise harmónica, na teoria das probabilidades, na análise geométrica e no cálculo das variações.

Nota bibliográfica

A teoria das medidas de Borel, das medidas de Radon e das propriedades de regularidade é tratada de forma sistemática na maioria dos textos modernos de Teoria da Medida. Entre as referências clássicas destacam-se *Measure Theory*, de Paul R. Halmos [36], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31], *Measure Theory*, de Donald L. Cohn [18], e *Measure Theory*, de Vladimir I. Bogachev [8]. Para uma abordagem orientada para a Análise Geométrica e a Teoria Geométrica da Medida, são referências fundamentais *Geometric Measure Theory*, de Herbert Federer [30], *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, de Pertti Mattila [54], e *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, de Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy [28]. No contexto do Cálculo das Variações e da teoria das funções de variação limitada, destacam-se *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, de Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara [2], e *Sets of Finite Perimeter and Geometric*

> *Variational Problems*, de Francesco Maggi [51], onde as propriedades de regularidade das medidas de Radon desempenham um papel central.

Capítulo 15

Medidas de Radon e Dualidade

15.1 Resultados topológicos preliminares

O estudo das medidas de Radon requer alguns resultados elementares de Topologia Geral. Reunimos nesta secção as propriedades que serão utilizadas repetidamente ao longo deste capítulo. Espaços em que todo compacto é fechado são chamados espaços KC.

Lema 15.1. *Se X é um espaço topológico de Hausdorff, então todo subconjunto compacto de X é fechado.*

Exercício. A demonstração segue do facto de que, em espaços de Hausdorff, os limites de redes são únicos. Em particular, todo ponto de acumulação de um conjunto compacto pertence ao próprio conjunto. □

Lema 15.2. *Todo espaço métrico é Hausdorff.*

Exercício. Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$. Tomando $r = \frac{1}{2}d(x,y)$, as bolas $B(x,r)$ e $B(y,r)$ são disjuntas. □

Em particular, em espaços métricos todo conjunto compacto é fechado e, consequentemente, Boreliano. Logo, todo compacto é mensurável relativamente a qualquer medida de Borel.

15.2 Medidas de Radon (definição preliminar)

Introduzimos inicialmente a definição histórica de medida de Radon. Embora seja frequentemente substituída por formulações equivalentes mais económicas, esta definição evidencia de forma natural as propriedades de regularidade que motivaram a teoria.

Johann Radon
(1887–1956)

Medidas de Radon – propriedades

Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Uma *medida de Radon* em X é uma medida de Borel μ tal que:

- μ é exterior-regular nos conjuntos Borelianos;
- μ é interior-regular nos conjuntos abertos;
- $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$.

Por definição, pertence ao espaço $\mathcal{M}(X)$. No caso vetorial, escrevemos

$$\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n).$$

> *Nota* 15.3. Uma medida de Borel finita num espaço métrico é automaticamente uma medida de Radon, pelos resultados de regularidade estabelecidos no capítulo anterior.

Medidas de Radon finitas – definição

Uma *medida de Radon finita* é uma medida de Radon que satisfaz $\mu(X) < \infty$. Por definição, pertence ao espaço $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(X)$. No caso vetorial, escrevemos

$$\mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n).$$

15.3 Funcionais lineares e contínuos em $\mathcal{C}_0(X)$ são medidas de Borel

O objetivo desta secção é estabelecer a ligação entre funcionais lineares positivos em $\mathcal{C}_0(X)$ e medidas de Borel. Começamos por mostrar que a medida exterior associada a um funcional possui uma propriedade fundamental: é finita em conjuntos compactos.

Proposição 15.4. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e $u \in (\mathcal{C}_0(X))'$. Então*

- *para todo compacto $K \subset X$, vale $\mu_u^*(K) < \infty$ (Lema 14.2); além disso,*

$$\mu_u(K) \leq u(f), \qquad \text{sempre que } f \geq \chi_K.$$

- *todo conjunto Boreliano $B \subset X$ é μ_u^*-mensurável (Proposição 14.9).*

Demonstração. Seja $K \subset X$ compacto e escolha $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tal que $\chi_K \leq f \leq 1$. Fixe $0 < \varepsilon < 1$ e considere o aberto

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \, f(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

Como $f = 1$ em K, tem-se $K \subset U_\varepsilon$. Pelo lema de Urysohn, existem um aberto V_ε e uma função $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(X)$ tais que

$$K \subset V_\varepsilon, \qquad g_\varepsilon = 1 \text{ em } V_\varepsilon, \qquad 0 \leq g_\varepsilon \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(g_\varepsilon) \Subset U_\varepsilon.$$

Se $h \in \mathcal{C}_0(X)$ satisfaz

$$0 \leq h \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(h) \Subset V_\varepsilon,$$

então $h \leq g_\varepsilon$. Pela positividade de u, $u(h) \leq u(g_\varepsilon)$. Tomando o supremo sobre todas essas funções h, obtemos $\mu_u(V_\varepsilon) \leq u(g_\varepsilon)$. Como $f > 1 - \varepsilon$ em $\operatorname{spt}(g_\varepsilon)$, segue que $g_\varepsilon \leq (1-\varepsilon)^{-1} f$. Logo,

$$\mu_u^*(K) \leq \mu_u(V_\varepsilon) \leq u(g_\varepsilon) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} u(f).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que $\mu_u^*(K) \leq u(f) < \infty$. □

Nota. Observe-se que, na verdade, a aditividade, a positividade e a limitação de u são suficientes para obter a desigualdade anterior. A hipótese de local compacidade é utilizada para definir a norma do supremo em $\mathcal{C}_0(X)$.

Proposição 15.5. *Para todo compacto $K \subset X$,*

$$\mu_u^*(K) = \inf\big\{u(f) : f \in \mathcal{C}_0(X), \; f \geq \chi_K\big\}.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, para toda função $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tal que $f \geq \chi_K$, tem-se $\mu_u^*(K) \leq u(f)$. Logo,

$$\mu_u^*(K) \leq \inf\big\{u(f) : f \in \mathcal{C}_0(X), \; f \geq \chi_K\big\}.$$

Para provar a desigualdade inversa, fixe-se $\varepsilon > 0$. Pela definição de $\mu_u^*(K)$, existe um aberto $U \supset K$ tal que

$$\mu_u(U) \leq \mu_u^*(K) + \varepsilon.$$

Como K é compacto e U é aberto, existe $f \in \mathcal{C}_0(X)$ tal que

$$\chi_K \leq f \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(f) \Subset U.$$

Assim, f é admissível na definição de $\mu_u(U)$, pelo que

$$u(f) \leq \mu_u(U) \leq \mu_u^*(K) + \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\inf\{u(g) : g \in \mathcal{C}_0(X),\ g \geq \chi_K\} \leq \mu_u^*(K) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\inf\{u(g) : g \in \mathcal{C}_0(X),\ g \geq \chi_K\} \leq \mu_u^*(K).$$

Combinando as duas desigualdades, concluímos que

$$\mu_u^*(K) = \inf\{u(f) : f \in \mathcal{C}_0(X),\ f \geq \chi_K\}.$$

□

15.4 Funcionais lineares e contínuos em $\mathcal{C}_0(X)$ são medidas de Radon finitas

Na secção anterior demonstrámos que todo funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(X)$ define naturalmente uma medida de Borel. O objetivo desta secção é mostrar que essa medida satisfaz automaticamente as propriedades de regularidade estudadas no Capítulo 12. Em consequência, ela é uma medida de Radon. Assim, obtém-se uma aplicação natural

$$(C_0(X))' \longrightarrow \mathcal{M}_b(X),$$

que associa a cada funcional linear contínuo uma medida de Radon finita. Este resultado constitui a primeira metade do teorema de representação de Riesz–Markov. A recíproca, isto é, a construção de um funcional linear contínuo a partir de uma medida de Radon, será demonstrada no Capítulo 17.

Teorema 15.6 (Medidas de Radon associadas a funcionais em $\mathcal{C}_0(X)$)**.** *Seja X um espaço métrico separável e localmente compacto (ou, mais geralmente, um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ-compacto). Seja*

$$u \in \big(C_0(X)\big)'.$$

Então a medida de Borel

$$\mu := \mu_u^*|_{\mathcal{B}(X)}$$

é uma medida de Radon finita.

Demonstração. Escrevamos $u = u^+ - u^-$, onde u^+ e u^- são funcionais lineares positivos. Pela Proposição 15.4, cada um deles define uma medida de Borel positiva, finita nos compactos. Assim,

$$\mu = \mu_{u^+} - \mu_{u^-}$$

é uma medida de Borel com sinal finita nos compactos. Pelo Lema 14.2 é uma medida finita. Sendo por construção exterior regular, e sendo interior regular nos abertos pela Proposição 14.23, toda medida de Borel finita nos compactos é uma medida de Radon. Concluímos que μ é uma medida de Radon finita. □

Na verdade, demonstraremos que a medida de Radon finita associada a um funcional positivo de $\mathcal{C}_0(X)$ é automaticamente regular em todos os conjuntos mensuráveis.

Corolário 15.7 (Regularidade nos conjuntos mensuráveis)**.** *Seja X um espaço métrico separável e localmente compacto ou, mais geralmente, um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ-compacto. Seja $0 \leq u \in \big(\mathcal{C}_0(X)\big)'$ e seja*

$$\mu_u := \mu_u^*|_{\mathcal{B}(X)}$$

a medida de Borel associada a u. Então μ_u é uma medida finita e regular em todos os conjuntos μ_u-mensuráveis.

Demonstração. Por construção, μ_u é exterior-regular. Além disso, pelo Lema 14.2, $\mu_u(X) = \|u\| < \infty$. A regularidade nos conjuntos mensuráveis segue, portanto, do Corolário 14.25. □

Nota 15.8. A regularidade interior foi inicialmente estabelecida nos conjuntos fechados. Sob as hipóteses anteriores sobre X, ela pode ser reforçada para regularidade interior por conjuntos compactos.

15.5 Medidas de Radon: definição definitiva

Definição 15.9 (Medida de Radon)**.** Seja X um espaço métrico separável e localmente compacto ou, mais geralmente, um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ-compacto.
Uma medida de Radon em X é uma medida de Borel positiva que é finita nos conjuntos compactos.

Regularidade das medidas de Radon	
X **métrico**	• Borel-regular em $\mathcal{B}(K)$ para todo compacto K (Lema 14.19); • interior-regular em abertos por fechados (Lema 14.17); • se X é localmente compacto e separável, interior-regular em abertos por compactos (Lema 14.20 e Nota 14.21); • interior-regular em $E \subset K$ mensurável por fechados e compactos (Lema 14.19 e Lema 14.16).
X **Hausdorff localmente compacto e σ-compacto**	• se μ é exterior-regular em $\mathcal{P}(X)$, então é Borel-regular nos conjuntos mensuráveis (Lema 14.25 e Nota 17.11).

Nota 15.10. Nas classes de espaços métricos acima, a regularidade não faz parte da definição de medida de Radon: ela é uma consequência da finitude nos conjuntos compactos. Assim, as propriedades de regularidade consideradas na Secção 15.2 são, de facto, redundantes.

Capítulo 16

Medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

16.1 Volume de retângulos

Usaremos os retângulos como conjuntos elementares para construir a medida de Lebesgue.

Definição 16.1 (Retângulo fechado)**.** Um *retângulo fechado* n-dimensional, com lados paralelos aos eixos coordenados (ou simplesmente, *retângulo*), é um subconjunto $R \subset \mathbb{R}^n$ da forma

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

onde

$$-\infty < a_i \leq b_i < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

O *volume* de R é definido por

$$\mu(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Quando $n = 1$ e $n = 2$, o volume de um retângulo coincide, respetivamente, com o seu comprimento e a sua área. Convencionamos ainda que o conjunto vazio $\emptyset$ é um retângulo e definimos

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

Denotamos por

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}^n),$$

ou simplesmente por $\mathcal{R}$, a coleção de todos os retângulos de $\mathbb{R}^n$. Assim, a aplicação

$$\mu : \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty)$$

está bem definida.

Nota 16.2. A escolha dos retângulos é feita por conveniência. Poderíamos utilizar outras famílias de conjuntos elementares, como retângulos abertos, cubos ou bolas, obtendo a mesma medida de Lebesgue.

16.1.1 Propriedades do volume

Proposição 16.3. *Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo.*

(i) *(Subaditividade finita) Se*

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i,$$

então

$$\mu(R) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i).$$

(ii) *(σ-aditividade) Se*

$$R = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} R_i,$$

então

$$\mu(R) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i).$$

Nota 16.4. O símbolo $\bigsqcup$ denota uma união quase disjunta, isto é, os conjuntos podem intersectar-se apenas nas suas fronteiras.

16.2 Medida exterior de Lebesgue

Definição 16.5 (Medida exterior de Lebesgue)**.** Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Define-se a *medida exterior de Lebesgue* de E por

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i,\ R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

A aplicação

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

é chamada *medida exterior de Lebesgue*.

Nota 16.6. Não se exige que os retângulos da cobertura sejam disjuntos e a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i)$$

pode ser divergente, caso em que o seu valor é $+\infty$.

Exemplo 16.7. Considere o conjunto $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Então $\mu^*(E) = 0$.

Demonstração. Seja $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de E. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos, para cada i, um intervalo R_i contendo q_i tal que $\mu(R_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$. Então $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) = \varepsilon$.

Logo, $0 \leq \mu^*(E) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\mu^*(E) = 0$. □

Nota 16.8. O mesmo argumento mostra que todo conjunto numerável tem medida exterior nula. Este exemplo evidencia ainda a necessidade de considerar coberturas numeráveis, e não apenas finitas, na definição da medida exterior.

16.3 Propriedades da medida exterior

Teorema 16.9. *A medida exterior de Lebesgue μ^* satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. *Se $E \subset F$, então*
$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F);$$
3. *(σ-subaditividade) Para qualquer sucessão (E_i),*
$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Demonstração. As duas primeiras propriedades seguem imediatamente da definição. Para demonstrar a terceira, seja $\varepsilon > 0$. Para cada i, existe uma cobertura $(R_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ de E_i tal que
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_{ij}) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$
Então a família $\{R_{ij}\}_{i,j}$ constitui uma cobertura de $\bigcup_i E_i$. Assim,
$$\mu^*\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$
Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que
$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$
□

16.3.1 Compatibilidade com o volume

Definição 16.10. Um *retângulo aberto* é um conjunto da forma $(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)$, onde $-\infty < a_i < b_i < \infty$. O seu volume é definido pela mesma fórmula:
$$\mu(R) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Lema 16.11. *Se $R \subset \mathbb{R}^n$ é um retângulo, então*

$$\mu^*(R) = \mu(R).$$

Demonstração. A desigualdade $\mu^*(R) \leq \mu(R)$ é imediata, pois R constitui uma cobertura de si próprio. Reciprocamente, suponha que $R \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, onde os R_i são retângulos fechados. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada i, existe um retângulo aberto S_i tal que $R_i \subset S_i$ e

$$\mu(S_i) \leq \mu(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Como R é compacto e (S_i) é uma cobertura aberta de R, existe uma subcobertura finita:

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} S_i.$$

Pela subaditividade finita do volume,

$$\mu(R) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(S_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) + \varepsilon.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer cobertura de R, segue que

$$\mu(R) \leq \mu^*(R) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\mu(R) \leq \mu^*(R)$. Logo, $\mu^*(R) = \mu(R)$. □

16.4 Lebesgue-mensurabilidade

Definição 16.12 (Conjunto mensurável de Lebesgue)**.** Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **mensurável no sentido de Lebesgue** se, para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

A coleção de todos os conjuntos mensuráveis é denotada por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. A restrição da medida exterior a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)},$$

é chamada **medida de Lebesgue**.

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, denotamos por $\mathcal{L}(E)$ a σ-álgebra dos subconjuntos mensuráveis de E.

Teorema 16.13 (Teorema de Carathéodory)**.** *A coleção $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ constitui uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*
Além disso, a restrição

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$$

é uma medida completa.

Demonstração. A demonstração de que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra baseia-se diretamente na condição de Carathéodory. É imediato que $\emptyset \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, então a condição de Carathéodory é simétrica relativamente a A e A^c, pelo que $A^c \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Mostra-se igualmente que a união finita de conjuntos mensuráveis é mensurável. Aplicando este resultado às uniões parciais

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

e utilizando a continuidade da medida exterior relativamente às sucessões crescentes de conjuntos mensuráveis, conclui-se que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é mensurável. Logo, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra. A restrição de μ^* a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida, pois a condição de Carathéodory implica a aditividade contável sobre conjuntos mensuráveis. Finalmente, se $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\mu(N) = 0$ e $M \subset N$, então $\mu^*(M) \leq \mu(N) = 0$, pelo que $\mu^*(M) = 0$. Como todo conjunto de medida exterior nula é mensurável, segue que $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, μ é completa. □

16.4.1 Mensurabilidade de retângulos

Proposição 16.14. *Todo retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável no sentido de Lebesgue.*

Demonstração. Seja R um retângulo e $E \subset \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura (R_i) de E tal que

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i).$$

Cada retângulo R_i pode ser decomposto numa união finita quase disjunta de retângulos,

$$R_i = \widetilde{R}_i \sqcup \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m_i} S_{i,j} \Big),$$

onde

$$\widetilde{R}_i \subset R, \qquad S_{i,j} \subset R^c.$$

Pela aditividade finita do volume,

$$\mu(R_i) = \mu(\widetilde{R}_i) + \sum_{j=1}^{m_i} \mu(S_{i,j}).$$

Somando em i,

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i} \mu(\widetilde{R}_i) + \sum_{i} \sum_{j} \mu(S_{i,j}).$$

Como $(\widetilde{R}_i)$ cobre $E \cap R$ e a família $(S_{i,j})_{i,j}$ cobre $E \cap R^c$, segue que

$$\mu^*(E \cap R) \leq \sum_{i} \mu(\widetilde{R}_i),$$

e

$$\mu^*(E \cap R^c) \leq \sum_{i} \sum_{j} \mu(S_{i,j}).$$

Logo,

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c).$$

A desigualdade oposta decorre da σ-subaditividade da medida exterior. Portanto,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c),$$

e R é mensurável. □

16.4.2 Mensurabilidade de abertos

> *Nota* 16.15. Em $\mathbb{R}$, todo conjunto aberto é união numerável de intervalos disjuntos. Em $\mathbb{R}^n$, esta propriedade deixa de ser verdadeira para retângulos abertos.

No entanto, podemos decompor qualquer aberto numa união numerável de cubos díadicos quase disjuntos.

> **Proposição 16.16.** *Todo conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}^n$ é união numerável de cubos díadicos quase disjuntos.*

Demonstração. Consideremos a família de todos os cubos díadicos de $\mathbb{R}^n$, isto é, os cubos da forma

$$2^{-k}(m + [0,1]^n), \qquad k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^n.$$

Selecionamos todos os cubos díadics maximais contidos em G. Como a família dos cubos díadicos é numerável, a família selecionada também é numerável. Além disso, dois cubos díadicos maximais distintos só podem intersectar-se na fronteira, sendo portanto quase disjuntos. Se $x \in G$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$. Escolhendo k suficientemente grande, qualquer cubo díadico de geração k que contenha x tem diâmetro inferior a r, ficando assim contido em G. Este cubo está contido num cubo díadico maximal selecionado. Logo,

$$G = \bigcup_i Q_i,$$

onde os Q_i são cubos díadicos quase disjuntos. □

> *Nota* 16.17. Em particular, todo conjunto aberto é união numerável quase disjunta de cubos díadicos.

16.4.3 Conjuntos borelianos

> **Definição 16.18.** A **σ-álgebra de Borel** de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, é a menor σ-álgebra que contém todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Os seus elementos chamam-se **conjuntos borelianos**.

Teorema 16.19. *Todo conjunto boreliano é mensurável no sentido de Lebesgue.*

Demonstração. Pela proposição anterior, todo conjunto aberto é mensurável. Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra, contém todos os conjuntos obtidos a partir dos abertos por complementação e uniões numeráveis. Mas $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é precisamente a menor σ-álgebra que contém todos os abertos. Logo,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

□

16.4.4 Conjuntos de medida nula

Definição 16.20. Um conjunto $N \subset \mathbb{R}^n$ diz-se de **medida nula** se

$$\mu(N) = 0.$$

Proposição 16.21. *Todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável e tem medida nula.*

Demonstração. Seja $M \subset N$, onde $\mu(N) = 0$. Pela monotonicidade da medida exterior,

$$0 \leq \mu^*(M) \leq \mu(N) = 0,$$

pelo que $\mu^*(M) = 0$. Como a medida de Lebesgue é completa, segue que M é mensurável. Além disso, $\mu(M) = 0$. □

16.5 Regularidade Borel e estrutura da σ-álgebra de Lebesgue

A construção de Carathéodory fornece uma caracterização abstrata dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis. No entanto, do ponto de vista da Análise, é igualmente importante compreender como esses conjuntos podem ser aproximados por objetos topologicamente simples.

Nesta secção estabelecemos três formas complementares de regularidade. Primeiro mostramos que todo conjunto mensurável pode ser aproximado exteriormente por abertos. Em seguida, provamos que os conjuntos de medida finita podem ser aproximados interiormente por compactos. Finalmente, combinando estes dois resultados, obtemos uma aproximação por conjuntos de Borel, mostrando que todo conjunto de Lebesgue difere de um conjunto de Borel apenas por um conjunto de medida nula. Esta descrição conduz naturalmente ao completamento da σ-álgebra de Borel e permite identificar a σ-álgebra de Lebesgue como o completamento da medida de Borel.

Definição 16.22 (G_δ e F_σ)**.** Um conjunto da forma

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k, \qquad U_k \text{ aberto},$$

chama-se um conjunto G_δ. Um conjunto da forma

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \qquad F_k \text{ fechado},$$

chama-se um conjunto F_σ.

Nota 16.23. Todo conjunto G_δ e todo conjunto F_σ pertence à σ-álgebra de Borel.

Os conjuntos abertos e compactos desempenham papéis distintos na teoria da medida. Os primeiros permitem aproximações "por fora", enquanto os segundos permitem aproximações "por dentro". Começamos pela regularidade exterior.

Proposição 16.24 (Regularidade exterior)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável. Então*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ aberto}\}.$$

Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $G \supset A$ tal que

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon.$$

Demonstração. Como A é mensurável, $\mu(A) = \mu^*(A)$. Pela definição da medida exterior, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma família numerável de retângulos (R_i) tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Seja $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$. Então G é aberto e contém A. Pela subaditividade enumerável,

$$\mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Por outro lado, como $A \subset G$,

$$\mu(A) \leq \mu(G).$$

Logo,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ aberto}\}.$$

Finalmente,

$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) < \varepsilon,$$

pois A é mensurável e $A \subset G$. □

Quando a medida do conjunto é finita, a aproximação exterior admite um resultado complementar: é possível aproximar o conjunto por compactos contidos no seu interior.

Proposição 16.25 (Regularidade interior)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e suponha que $\mu(A) < \infty$. Então*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\}.$$

Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset A$ tal que

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela regularidade exterior aplicada ao complementar A^c, existe um aberto $G \supset A^c$ tal que $\mu(G \setminus A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $G \setminus A^c = G \cap A$, obtemos $\mu(G \cap A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mu(A) < \infty$, existe $m > 0$ tal que

$$\mu\big(A \setminus [-m, m]^n\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos

$$K = (A \setminus G) \cap [-m, m]^n.$$

Como $A \setminus G = G^c \cap A$, o conjunto K é fechado, limitado e contido em A; logo, é compacto. Além disso,

$$A \setminus K \subset (A \cap G) \cup \big(A \setminus [-m, m]^n\big),$$

e, portanto,

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu(A \cap G) + \mu\big(A \setminus [-m, m]^n\big) < \varepsilon.$$

Finalmente,

$$\mu(K) = \mu(A) - \mu(A \setminus K) > \mu(A) - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\}$. □

As regularidades exterior e interior podem ser resumidas pela seguinte configuração: um conjunto mensurável de medida finita pode ser aproximado simultaneamente por um compacto contido nele e por um aberto que o contém.

$$K \subset A \subset G$$

$$K \text{ compacto} \quad A \text{ mensurável} \quad G \text{ aberto}$$

As aproximações por abertos e por compactos podem agora ser combinadas para obter uma descrição inteiramente em termos de conjuntos de Borel.

Teorema 16.26 (Regularidade Borel)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável. Então existem conjuntos*

$$G \in G_\delta(\mathbb{R}^n), \qquad F \in F_\sigma(\mathbb{R}^n),$$

tais que $F \subset A \subset G$ e

$$\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, pela regularidade exterior, existe um aberto $G_k \supset A$ tal que $\mu(G_k \setminus A) < 2^{-k}$. Definamos

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Então $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$ e $A \subset G$. Além disso, para todo $k \in \mathbb{N}$, $G \setminus A \subset G_k \setminus A$, pelo que

$$\mu(G \setminus A) \leq \mu(G_k \setminus A) < 2^{-k}.$$

Como esta desigualdade vale para todo k, $\mu(G \setminus A) = 0$. Para construir F, considere, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$A_m = A \cap [-m, m]^n.$$

O conjunto A_m é mensurável e tem medida finita. Pela regularidade interior, existe um compacto $K_m \subset A_m$ tal que $\mu(A_m \setminus K_m) < 2^{-m}$. Defina

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

Como cada K_m é fechado, $F \in F_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $F \subset A$. Como $K_m \subset F$, temos $A_m \setminus F \subset A_m \setminus K_m$, e, portanto, $\mu(A_m \setminus F) < 2^{-m}$. Por outro lado,

$$A_m \setminus F \uparrow A \setminus F.$$

Pela continuidade da medida por baixo,

$$\mu(A \setminus F) = \lim_{m \to \infty} \mu(A_m \setminus F) = 0.$$

□

Substituindo os compactos e os abertos por classes borelianas estáveis por operações numeráveis, obtemos uma aproximação mais estrutural:

$$\boxed{F_\sigma \subset A \subset G_\delta}$$

aproximação interior aproximação exterior,

em que

$$\mu(A \setminus F) = \mu(G \setminus A) = 0.$$

Nota 16.27. Em particular, todo conjunto Lebesgue-mensurável difere de um conjunto de Borel apenas por um conjunto de medida nula.

Nota 16.28 (Comparação entre Borel e Lebesgue). A σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ está estritamente contida na σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e não é completa.
A completude de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ significa que ela contém todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula.

Exercício 94 (D)

Demonstrar que a cardinalidade de $\mathcal{B}$ é igual à cardinalidade $\mathfrak{c}$ dos números reais, enquanto a cardinalidade de $\mathcal{L}$ é $2^{\mathfrak{c}}$.

A regularidade Borel mostra que todo conjunto Lebesgue-mensurável pode ser substituído, sem alterar a medida, por um conjunto de Borel. Esta propriedade permite identificar a σ-álgebra de Lebesgue como o completamento da σ-álgebra de Borel relativamente à medida de Lebesgue.

Teorema 16.29 (Teorema da completação de Lebesgue)**.** *A σ-álgebra de Lebesgue é a completação da σ-álgebra de Borel relativamente à medida de Lebesgue:*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_\mu(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pela proposição anterior, existem conjuntos de Borel F e G tais que $F \subset A \subset G$ e $\mu(G \setminus F) = 0$. Como $A = F \cup (A \setminus F)$ e $A \setminus F \subset G \setminus F$, o conjunto A pertence à completação da medida de Borel. Logo,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_\mu(\mathbb{R}^n).$$

Reciprocamente, seja $A = B \cup N$, onde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $N \subset Z$, com $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu(Z) = 0$. Como os conjuntos de Borel são Lebesgue-mensuráveis e a medida de Lebesgue é completa, temos $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Portanto,

$$\mathcal{B}_\mu(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

□

O teorema anterior admite uma interpretação simples: a σ-álgebra de Lebesgue obtém-se completando a σ-álgebra de Borel relativamente à medida de Lebesgue.

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ \Downarrow \\ \text{adicionar todos os subconjuntos} \\ \text{dos conjuntos de medida nula} \\ \Downarrow \\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Nota 16.30 (Conjunto de Cantor e subconjuntos não borelianos)*.* O conjunto de Cantor $C \subset [0,1]$ é fechado, tem medida de Lebesgue nula e cardinalidade $\mathfrak{c}$. Como a medida de Lebesgue é completa, todo subconjunto de C é Lebesgue-mensurável. Contudo, nem todo subconjunto de C é boreliano. De facto, existem apenas $\mathfrak{c}$ conjuntos de Borel em $\mathbb{R}$, enquanto C possui $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos. Logo, a maioria dos subconjuntos de C não pertence à σ-álgebra de Borel.

Exercício 95 (F)

Mostre que, se $A, B \subset \mathbb{R}$ têm medida positiva, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\mu((A+q) \cap B) > 0.$$

Exercício 96 (M)

Mostre que, se $A \subset \mathbb{R}$ satisfaz $A + q = A$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, então

$$\mu(A^c) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(A) = 0.$$

Exercício 97 (D)

Mostre que todo mapa aditivo mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear. Discuta onde o axioma da escolha entra na construção de contraexemplos.

16.6 Invariância da medida de Lebesgue

Proposição 16.31 (Invariância por translações)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}^n$. Para todo conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(E + a) = \mu(E),$$

onde $E + a = \{x + a : x \in E\}$.

Demonstração. Pela definição da medida exterior,

$$\mu^*(E + a) = \mu^*(E),$$

pois a translação preserva o volume dos retângulos. Além disso, se E é mensurável, então $E + a$ também o é, uma vez que a condição de Carathéodory é preservada por translações. Como

$$\mu(E) = \mu^*(E) \quad \text{e} \quad \mu(E + a) = \mu^*(E + a),$$

segue que $\mu(E + a) = \mu(E)$. □

Proposição 16.32. *A medida de Lebesgue é invariante sob isometrias de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. A invariância segue da invariância do volume e da definição de medida exterior. □

Proposição 16.33. *Seja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal. Então*

$$\mu^*(QE) = \mu^*(E),$$

e

$$E \text{ é mensurável} \iff QE \text{ é mensurável.}$$

Proposição 16.34. *Seja*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n), \qquad \lambda_i > 0.$$

Então

$$\mu^*(\Lambda E) = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \mu^*(E).$$

Teorema 16.35. *Seja*

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

linear e invertível. Então

$$\mu^*(TE) = |\det T|\,\mu^*(E),$$

e

$$E \text{ é mensurável} \iff TE \text{ é mensurável.}$$

A construção da medida de Lebesgue desenvolve-se em várias etapas sucessivas. Parte-se da noção elementar de volume dos retângulos, constrói-se a medida exterior e, através do critério de Carathéodory, identifica-se a classe dos conjuntos mensuráveis. Os resultados de regularidade obtidos nesta secção mostram finalmente que a σ-álgebra de Lebesgue coincide com o completamento da σ-álgebra de Borel.

Retângulos
$\Downarrow$
Medida exterior μ^*
$\Downarrow$
Critério de Carathéodory
$\Downarrow$
Medida de Lebesgue μ
$\Downarrow$
Regularidade
$\Downarrow$
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_\mu(\mathbb{R}^n)$

Corolário 16.36 (Unicidade da medida de Lebesgue)**.** *A medida de Lebesgue é a única medida completa em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que coincide com o volume nos retângulos.*

Demonstração. Seja $\nu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ uma medida completa que coincide com o volume nos retângulos. As restrições de ν e da medida de Lebesgue μ à σ-álgebra de Borel coincidem nos retângulos. Além disso, ambas são σ-finitas, pois

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k,k]^n$$

e

$$\nu([-k,k]^n) = \mu([-k,k]^n) = (2k)^n < \infty.$$

Como os retângulos geram $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, o teorema de unicidade para medidas σ-finitas implica que $\nu(B) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Seja agora $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da completação de Lebesgue, existem conjuntos de Borel B e C tais que $B \subset A \subset C$ e $\mu(C \setminus B) = 0$. Como $\nu = \mu$ nos conjuntos de Borel, $\nu(C \setminus B) = 0$. Assim, $\nu(B) \le \nu(A) \le \nu(C)$ e

$$\nu(C) = \nu(B).$$

Logo, $\nu(A) = \nu(B) = \mu(B) = \mu(A)$. Portanto, $\nu = \mu$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. □

Nota 16.37. A coincidência com o volume nos retângulos já determina a medida nos conjuntos de Borel e, por completação, em todos os conjuntos de Lebesgue. A invariância por translações é, portanto, uma propriedade natural da medida de Lebesgue, mas não é necessária para a unicidade.

Nota 16.38. Existe uma caracterização alternativa da medida de Lebesgue, de natureza mais geométrica. Ela afirma que a medida de Lebesgue é a única medida de Borel positiva e σ-finita em $\mathbb{R}^n$ que é invariante por translações e satisfaz a normalização $\mu([0,1]^n) = 1$. Nesta formulação, a coincidência com o volume dos retângulos não é assumida, mas decorre da invariância por translações, da σ-aditividade e da continuidade da medida. Este resultado é um caso particular do teorema de Haar para grupos localmente compactos.

Exercício 98 (F)

Prove diretamente a subaditividade finita do volume: se $R \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i$, então $\mu(R) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i)$. (Sugestão: comece pelo caso $n = 1$ e utilize indução.)

Exercício 99 (F)

Mostre que o conjunto vazio tem medida exterior nula, isto é, $\mu^*(\emptyset) = 0$. Mostre que qualquer conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$ tem medida exterior nula. Generalize o exemplo dos racionais e prove que qualquer conjunto numerável tem medida exterior zero.

Nota histórica

A teoria da medida nasceu no início do século XX com o objetivo de alargar a integral de Riemann a classes muito mais vastas de funções. Em 1902, Henri Lebesgue introduziu a sua nova integral na sua tese *Intégrale, longueur, aire* [45], através da construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, baseada na aproximação por conjuntos elementares. Dois anos mais tarde, apresentou uma exposição sistemática da teoria, bem como das suas relações com o problema da determinação de funções primitivas, nas *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [46]. Poucos anos mais tarde, Constantin Carathéodory [16] formulou uma abordagem axiomática baseada na noção de medida exterior e no seu critério de mensurabilidade. Esta construção, hoje conhecida como construção de Carathéodory, mostrou-se suficientemente geral para construir numerosas medidas para além da medida de Lebesgue. A caracterização da medida de Lebesgue como completamento da medida de Borel constitui uma das consequências fundamentais desta teoria e desempenha um papel central na análise moderna.

Nota bibliográfica

A construção clássica da medida de Lebesgue pode ser encontrada em praticamente todos os tratados de Teoria da Medida. Entre as referências mais acessíveis, destacam-se *Measure Theory*, de Paul R. Halmos [36], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M.

Fitzpatrick [65], e *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31].
Para um tratamento mais aprofundado da regularidade das medidas de Borel e das medidas de Radon, recomenda-se *Measure Theory*, de Vladimir I. Bogachev [8]. Uma apresentação clássica da teoria em espaços localmente compactos encontra-se igualmente em *Real and Complex Analysis*, de Walter Rudin [68].

Capítulo 17

Integral de Lebesgue – Introdução

No capítulo anterior construímos a medida de Lebesgue a partir do volume dos retângulos. Mostrámos que essa medida pode ser estendida dos retângulos aos conjuntos de Borel e, por completação, à σ-álgebra de Lebesgue. A construção da integral segue a mesma filosofia. Em vez de integrar diretamente funções mensuráveis arbitrárias, começamos por funções muito simples, constantes em conjuntos mensuráveis, cuja integral é imediata. Estas funções, chamadas *funções simples*, desempenham para a integral de Lebesgue um papel análogo ao das funções em degraus na teoria da integral de Riemann. A ideia fundamental consiste em aproximar uma função mensurável por uma sucessão crescente de funções simples. A integral será então obtida como o limite das integrais dessas aproximações.

17.1 Aproximação por funções simples

A função característica de um conjunto $E \subset X$ é definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

As funções características constituem os blocos elementares da teoria da integração. Combinando um número finito dessas funções obtêm-se as chamadas funções simples.

Definição 17.1 (Função simples)**.** Uma função simples $\varphi : X \to \mathbb{R}$ num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ é uma função da forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x),$$

onde $c_k \in \mathbb{R}$, $E_k \in \mathcal{A}$ e $N \in \mathbb{N}^*$.

Toda função simples é mensurável. A sua representação não é única. Sempre que necessário, pode supor-se que os coeficientes são distintos e que os conjuntos E_k são dois a dois disjuntos; nesse caso diz-se que a representação está na *forma padrão*.

O resultado seguinte mostra que as funções simples são suficientemente numerosas para aproximar qualquer função mensurável positiva.

Proposição 17.2 (Aproximação por funções simples)**.** *Se $f : X \to [0, +\infty]$ é mensurável, então existe uma sucessão crescente de funções simples (φ_n) tal que*

$$\varphi_n \uparrow f \qquad \text{pontualmente.}$$

Mais precisamente, se f for limitada, pode escolher-se a sucessão (φ_n) de modo que $\|f - \varphi_n\|_\infty \leq 2^{-n}$, pelo que $\varphi_n \to f$ uniformemente.

A proposição anterior constitui o fundamento da construção da integral de Lebesgue. Começaremos por definir a integral para funções simples; em seguida, a integral de uma função mensurável positiva será obtida por passagem ao limite ao longo de uma aproximação crescente por funções simples.

17.2 Interpretação da integral de Lebesgue

A diferença essencial entre as integrais de Riemann e de Lebesgue reside na forma como a aproximação da função é efetuada.

Na integral de Riemann, particiona-se o domínio da função em subintervalos e substitui-se a função por funções em degraus constantes em cada subintervalo. Pelo contrário, na integral de Lebesgue, aproxima-se a função por funções simples obtidas agrupando os pontos do domínio segundo os valores que a função assume.

Esta diferença é frequentemente resumida da seguinte forma:

Integral de Riemann	**Integral de Lebesgue**
Particiona o domínio	Particiona a imagem

Henri Lebesgue descreveu esta ideia através da seguinte analogia:

> «Imaginez que je doive payer une certaine somme d'argent. Je peux sortir les pièces de ma poche et les donner au créancier dans l'ordre où je les trouve jusqu'à atteindre la somme totale : c'est l'intégrale de Riemann. Ou bien je peux ranger les pièces selon leur valeur, puis donner tant de pièces de 1 franc, tant de pièces de 2 francs, etc. : c'est mon intégrale.»

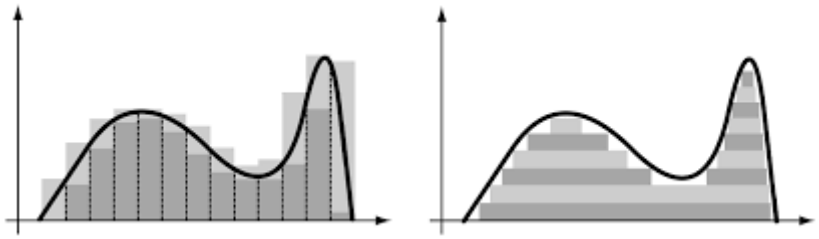
A analogia de Lebesgue evidencia a diferença conceptual entre as duas teorias de integração. Enquanto a integral de Riemann aproxima a função através de partições do domínio, a integral de Lebesgue agrupa primeiro os pontos do domínio segundo os valores assumidos pela função e mede o conjunto de pontos que produzem cada um desses valores.

Em termos esquemáticos,

- a integral de Riemann particiona o domínio da função e aproxima-a por funções em degraus constantes em cada subintervalo;
- a integral de Lebesgue agrupa os pontos do domínio de acordo com os valores da função e integra esses valores ponderando-os pela medida dos respetivos conjuntos de nível.

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Henri Lebesgue
(1875–1941)



Esta interpretação sugere naturalmente começar pela integração das funções simples. Como estas assumem apenas um número finito de valores, a sua integral é definida de forma imediata como uma soma ponderada das medidas dos conjuntos onde cada valor é atingido.

17.3 Integração de funções simples

Como as funções simples assumem apenas um número finito de valores, a sua integral pode ser definida de forma completamente explícita.

Definição 17.3 (Integral de uma função simples)**.** Se

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i},$$

define-se

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \mu(E_i),$$

adotando a convenção $0 \cdot \infty = 0$.

A convenção $0 \cdot \infty = 0$ garante, por exemplo, que a integral da função nula sobre um conjunto de medida infinita é igual a zero. Por outro lado, a integral de uma função simples positiva pode assumir o valor $+\infty$, caso algum dos conjuntos onde a função é positiva tenha medida infinita.

Embora uma função simples possa admitir diferentes representações como combinação

linear de funções características, a definição anterior é independente da representação escolhida.

Proposição 17.4. *A integral de uma função simples é independente da sua representação.*

Demonstração. A demonstração segue da aditividade finita da medida e do facto de quaisquer duas representações admitirem um refinamento comum por conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos. Nesse refinamento, as duas expressões conduzem à mesma soma ponderada, pelo que o valor da integral é independente da representação. □

O exemplo seguinte ilustra uma das principais vantagens da teoria de Lebesgue relativamente à integral de Riemann.

Exemplo 17.5. A função característica $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é integrável no sentido de Riemann em nenhum intervalo compacto de comprimento não nulo. No entanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} \, d\mu = \mu(\mathbb{Q}) = 0,$$

pois o conjunto dos números racionais é enumerável e, consequentemente, tem medida de Lebesgue nula.

A integral das funções simples satisfaz já as propriedades fundamentais esperadas de uma teoria de integração.

Proposição 17.6 (Propriedades da integral)**.** *Sejam $\varphi, \psi : X \to [0, +\infty)$ funções simples.*

(i) (Positividade)

$$\varphi \geq 0 \Longrightarrow \int \varphi \, d\mu \geq 0.$$

(ii) (Linearidade) Para todos os escalares $a, b \geq 0$,

$$\int (a\varphi + b\psi) \, d\mu = a \int \varphi \, d\mu + b \int \psi \, d\mu.$$

(iii) (Monotonia) Se $0 \leq \varphi \leq \psi$, então

$$\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu.$$

(iv) (Integral da função nula)

$$\int 0 \, d\mu = 0.$$

Demonstração. As propriedades seguem diretamente da definição da integral e das propriedades elementares da medida de Lebesgue. □

As propriedades anteriores mostram que a teoria funciona corretamente para funções

simples. O passo seguinte consiste em estender esta definição a funções mensuráveis positivas arbitrárias, utilizando aproximações crescentes por funções simples.

17.4 Integral de funções mensuráveis positivas

A definição da integral para funções simples permite agora construir a integral de uma função mensurável positiva arbitrária.

A ideia consiste em aproximar a função por baixo através de funções simples. Como essas aproximações formam uma sucessão crescente, é natural definir a integral como o maior valor obtido pelas integrais de todas essas aproximações.

Definição 17.7 (Integral de uma função mensurável positiva)**.** Se $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ é mensurável, define-se

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ simples} \right\}.$$

Diz-se que f é integrável quando

$$\int_X f \, d\mu < +\infty.$$

Esta definição estende a integral das funções simples sem alterar os valores já obtidos para essas funções. Além disso, ela é compatível com a aproximação crescente por funções simples, como mostra o resultado seguinte.

Proposição 17.8 (Continuidade monótona para funções simples)**.** *Se*

$$\varphi_n \uparrow f,$$

onde (φ_n) *é uma sucessão crescente de funções simples positivas e* f *é mensurável, então*

$$\int \varphi_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$$

Demonstração. Segue imediatamente da definição da integral como supremo das integrais das funções simples dominadas por f. □

O resultado anterior mostra que a definição da integral pode ser interpretada como uma passagem ao limite ao longo de aproximações crescentes por funções simples. Esta propriedade constitui o ponto de partida dos grandes teoremas de convergência da teoria da integração, começando pelo Teorema da Convergência Monótona de

17.5 Integração em subconjuntos mensuráveis

Na prática, é frequentemente necessário integrar uma função apenas sobre uma parte do domínio. Esta situação reduz-se naturalmente ao caso da integração em todo o espaço

utilizando a função característica do conjunto considerado.

Definição 17.9 (Integração em subconjuntos)**.** Se $A \subset X$ é mensurável e $f : X \to [0, +\infty]$ é mensurável, define-se

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \, \chi_A \, d\mu.$$

A definição anterior é compatível com as propriedades esperadas da integral.

Proposição 17.10 (Propriedades da integração em subconjuntos)**.** *Sejam $A, B \subset X$ conjuntos mensuráveis e $f : X \to [0, +\infty]$ mensurável.*

(i) Se $A \subset B$, então

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

(ii) Se $A \cap B = \varnothing$, então

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

(iii) Se $A \subset B$, então

$$\int_B f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{B \setminus A} f \, d\mu.$$

(iv) Se $\mu(A) = 0$, então

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

Demonstração. Todas estas propriedades decorrem diretamente da definição da integral sobre um subconjunto e das propriedades da função característica. □

As propriedades anteriores mostram que a integração sobre subconjuntos se comporta de forma inteiramente análoga ao caso da integração em intervalos na teoria de Riemann. Estamos agora em condições de estabelecer os principais teoremas de convergência da integral de Lebesgue.

17.6 Teoremas fundamentais da convergência

Os resultados anteriores permitiram construir a integral de Lebesgue para funções mensuráveis positivas e estabelecer as suas propriedades básicas. O passo seguinte consiste em estudar o comportamento da integral relativamente à passagem ao limite. Os três resultados fundamentais da teoria são o Teorema da Convergência Monótona de Beppo Levi, o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Dominada. Estes teoremas foram já demonstrados na Parte I, no contexto da integral de Daniell. Como a integral de Lebesgue coincide com a integral de Daniell para funções mensuráveis, permanecem válidos sem qualquer alteração. Os exercícios seguintes convidam o leitor a rever essas demonstrações e a reinterpretá-las no contexto da integral de Lebesgue.

Beppo Levi
(1875–1961)

Teorema 17.11 (Teorema da Convergência Monótona (Beppo Levi))**.** *Se (f_n) é uma sucessão crescente de funções mensuráveis com valores em $[0,+\infty]$, isto é,*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots,$$

e se

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Exercício 100 (M)

Demonstre o Teorema da Convergência Monótona.

Nota 17.12. Ao contrário da teoria de Daniell, a integral de Lebesgue de uma função mensurável positiva pode assumir o valor $+\infty$. O teorema permanece, contudo, válido sem qualquer hipótese adicional de integrabilidade.

A definição da integral de funções com sinal baseia-se na decomposição de uma função nas suas partes positiva e negativa.

Nota 17.13. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Definem-se a parte positiva e a parte negativa de f por $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$. Então

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Além disso, f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

Exercício 101 (M)

Enuncie e demonstre o Lema de Fatou.

Pierre Joseph Louis Fatou
(1878–1929)

Exercício 102 (M)

Enuncie e demonstre o Teorema da Convergência Dominada.

Os resultados anteriores permitem estender a definição da integral a funções mensuráveis com valores reais.

17.7 Funções mensuráveis integráveis

Recordemos que toda função mensurável pode ser escrita como diferença das suas partes positiva e negativa. Isto conduz naturalmente à definição seguinte.

Definição 17.14 (Integral de uma função mensurável)**.** Se $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, define-se

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu,$$

desde que pelo menos uma das integrais

$$\int_X f^+\,d\mu, \qquad \int_X f^-\,d\mu$$

seja finita.

Nota 17.15. Diz-se que f é integrável quando

$$\int_X |f|\,d\mu < \infty.$$

Esta condição é equivalente à finitude simultânea das integrais de f^+ e f^-.

Nota 17.16. A integral de uma função mensurável pode assumir os valores $\pm\infty$.

Contudo, ela não está definida quando

$$\int_X f^+ \, d\mu = \int_X f^- \, d\mu = +\infty,$$

pois a expressão $+\infty - (+\infty)$ é indeterminada.

Exercício 103 (M)

Sejam $E, F \subseteq X$. Determine se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Em caso de falsidade, forneça um contraexemplo e apresente a formulação correta.

1. $$\chi_{E\cap F} = \min(\chi_E, \chi_F) = \chi_E \chi_F;$$
2. $$\chi_{E\cup F} = \max(\chi_E, \chi_F) = \chi_E + \chi_F;$$
3. $$\chi_{E^c} = 1 - \chi_E;$$
4. $$\chi_{E\setminus F} = \chi_E - \chi_F.$$

Concluímos assim a construção da integral de Lebesgue para funções mensuráveis. Com ela dispomos de um poderoso instrumento de integração, fundamental em praticamente todos os ramos da Análise moderna.

Nota histórica

A teoria da integração conheceu um desenvolvimento decisivo no início do século XX. Em 1902, Henri Lebesgue [46]introduziu uma nova definição de integral baseada na medida dos conjuntos onde uma função assume determinados valores, ultrapassando as limitações da integral de Riemann e abrindo caminho à Análise moderna. Poucos anos mais tarde, Constantin Carathéodory formulou uma construção axiomática da medida através da noção de medida exterior e do seu célebre critério de mensurabilidade. Esta abordagem permitiu construir, de forma unificada, numerosas medidas e estabeleceu os fundamentos da teoria moderna da medida. Em paralelo, Percy J. Daniell [21] desenvolveu uma abordagem diferente da integração, baseada na extensão de funcionais lineares positivos definidos sobre espaços de funções. Apesar de partirem de pontos de vista distintos, as construções de Daniell e de Lebesgue conduzem à mesma noção de integral para funções integráveis.

Nota bibliográfica

Neste livro optou-se por apresentar primeiro a construção da integral de Daniell e só depois a construção clássica da integral de Lebesgue. A abordagem de Daniell parte da integral como um funcional linear positivo definido inicialmente sobre uma classe conveniente de funções e estendido por continuidade. Esta construção conduz naturalmente a uma teoria da integração de funções integráveis, isto é, de funções cuja integral é finita. A construção de Lebesgue segue uma filosofia diferente. Parte da medida dos conjuntos e define a integral por aproximação crescente através de fun-

ções simples. Esta abordagem permite integrar qualquer função mensurável positiva, mesmo quando a integral assume o valor $+\infty$, tornando natural o estudo de funções cuja integral pode ser infinita e fornecendo o enquadramento mais adequado para os grandes teoremas de convergência. Embora as duas construções partam de pontos de vista distintos, conduzem à mesma noção de integral para funções integráveis. A apresentação adotada neste livro procura evidenciar simultaneamente a elegância funcional da construção de Daniell e a flexibilidade da abordagem clássica de Lebesgue.Entre as referências introdutórias, recomendam-se *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*, de Michel Willem [77], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], *Measure Theory*, de Paul R. Halmos [36], e *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de Gerald B. Folland [31]. Para um tratamento mais aprofundado da Teoria da Medida, recomenda-se *Measure Theory*, de Vladimir I. Bogachev [8]. A abordagem de Daniell pode igualmente ser encontrada em textos clássicos de Análise Funcional, como *A Course in Functional Analysis*, de John B. Conway [19], e *Infinite Dimensional Analysis*, de Charalambos D. Aliprantis e Kim C. Border [1].

Parte IV

Representação e Estrutura das Medidas

Depois de desenvolvermos as duas grandes construções da integral de Lebesgue — a abordagem funcional de Daniell e a construção clássica baseada na Teoria da Medida —, chegamos agora ao ponto em que essas duas perspetivas se articulam de forma natural.

Começamos por aprofundar o estudo das funções mensuráveis. Introduzimos a convergência em medida e analisamos as suas relações com a convergência quase em toda a parte. O Teorema de Lusin mostra, por sua vez, que uma função mensurável pode ser considerada contínua fora de um conjunto de medida arbitrariamente pequena, estabelecendo uma primeira ligação entre a estrutura mensurável e a estrutura topológica.

Estudamos em seguida os teoremas de representação de Riesz, que identificam funcionais lineares contínuos sobre espaços de funções contínuas com medidas de Radon. Esta correspondência permite interpretar os espaços de medidas como espaços duais e conduz naturalmente ao estudo da convergência vaga e da topologia fraca-* das medidas de Radon.

O Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým descreve depois a estrutura de uma medida com sinal relativamente a uma medida positiva de referência. A decomposição de Hahn, a decomposição de Jordan e a derivada de Radon–Nikodým permitem distinguir, de forma canónica, as partes absolutamente contínua e singular de uma medida.

Apresentamos ainda alguns resultados fundamentais sobre convergência e integração, entre os quais os teoremas de Egorov e de Vitali, as desigualdades de Markov e de Chebyshev e o Teorema de Fubini. Estes resultados ilustram a aplicação da teoria desenvolvida anteriormente à Análise, à Probabilidade e à Estatística.

Finalmente, o Teorema de Hausdorff–Lebesgue mostra que as funções borelianas podem ser obtidas a partir das funções contínuas por passagens sucessivas ao limite pontual. Encerra-se assim o percurso iniciado na primeira parte destas notas: a Topologia, a Análise Funcional, a Teoria da Medida e a Integração revelam-se como componentes estreitamente ligadas de uma mesma estrutura matemática.

Capítulo 18

Funções mensuráveis, convergência em medida e teorema de Lusin

Neste capítulo aprofundamos o estudo das funções mensuráveis e das diferentes formas de convergência que intervêm na teoria da medida. Começaremos por distinguir a mensurabilidade abstrata, definida entre espaços mensuráveis, da mensurabilidade boreliana, associada às estruturas topológicas dos espaços de partida e de chegada. Introduziremos depois a convergência em medida e estudaremos a sua relação com a convergência quase em todo o ponto. Finalmente, o Teorema de Lusin mostrará que uma função mensurável pode ser considerada contínua fora de um conjunto de medida arbitrariamente pequena. Este resultado exprime uma das ideias fundamentais da teoria: embora a mensurabilidade seja muito mais fraca do que a continuidade, as funções mensuráveis são, em larga medida, aproximáveis por funções contínuas.

18.1 Funções mensuráveis e funções borelianas

Recordemos primeiro a definição abstrata de mensurabilidade entre dois espaços mensuráveis.

Definição 18.1 (Função mensurável)**.** Sejam $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$**-mensurável** se

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{N}.$$

Quando as σ-álgebras consideradas estiverem claras no contexto, diremos simplesmente que f é mensurável.

No caso de funções com valores reais, considera-se habitualmente em $\mathbb{R}$ a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Assim, uma função

$$f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$

é mensurável quando a imagem inversa de todo conjunto boreliano pertence a $\mathcal{M}$.

A troncatura constitui uma operação fundamental sobre funções mensuráveis. Permite substituir uma função eventualmente não limitada por funções limitadas, sem alterar os

seus valores na região onde estes já pertencem a um intervalo prescrito.

Exercício 104 (F)

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável. Para $A > 0$, defina-se a truncatura de f por

$$f_A(x) = \begin{cases} -A, & \text{se } f(x) < -A, \\ f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A, \\ A, & \text{se } f(x) > A. \end{cases}$$

Mostre que f_A é $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.

A mensurabilidade é preservada por diversas operações de passagem ao limite. O resultado seguinte será usado repetidamente na construção de aproximações mensuráveis.

Lema 18.2 (Limite crescente de funções mensuráveis)**.** *Seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ e suponha-se que $f_n \uparrow f$. Então f é mensurável.*

Demonstração. Como $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, para todo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\}.$$

Cada conjunto do segundo membro é mensurável e, portanto, a sua união numerável também é mensurável. Pelo critério de mensurabilidade para funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$, concluímos que f é mensurável. □

Quando os espaços envolvidos possuem uma topologia, as respetivas σ-álgebras de Borel fornecem uma noção particular de mensurabilidade.

Definição 18.3 (Função boreliana)**.** Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se **Borel-mensurável**, ou simplesmente **boreliana**, se

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X)$$

para todo aberto $U \subset Y$. Equivalentemente, f é mensurável de

$$\big(X, \mathcal{B}(X)\big) \quad \text{em} \quad \big(Y, \mathcal{B}(Y)\big).$$

Toda função contínua é boreliana, pois a imagem inversa de um aberto por uma função contínua é aberta. A recíproca é falsa: a mensurabilidade boreliana é consideravelmente mais fraca do que a continuidade.

Nota 18.4. A noção de função boreliana desempenha um papel central na teoria da medida. No entanto, quando se trabalha com a medida de Lebesgue, surge naturalmente uma classe mais ampla de funções, obtida substituindo a σ-álgebra de Borel pela σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis.

Assim, distinguiremos três níveis de regularidade:

funções contínuas, funções borelianas, funções Lebesgue-mensuráveis,

que serão relacionados mais adiante neste capítulo.

Proposição 18.5. *Toda função contínua é boreliana.*

Demonstração. Se $U \subset Y$ é aberto, pela continuidade de f, $f^{-1}(U)$ é um aberto de X. Como todo aberto é boreliano, $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X)$, pelo que f é Borel-mensurável. □

A recíproca é falsa: a mensurabilidade boreliana constitui uma propriedade estritamente mais fraca do que a continuidade. Existem funções borelianas com infinitos pontos de descontinuidade e até funções descontínuas em todo o seu domínio.

Exemplo 18.6. A função característica dos números racionais,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é boreliana, pois $\mathbb{Q}$ é um conjunto boreliano. No entanto, não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

18.2 Convergência em medida

Além da convergência pontual e da convergência quase em todo o ponto, a teoria da medida introduz uma noção de convergência mais flexível, baseada na medida do conjunto dos pontos onde duas funções diferem de forma apreciável. Esta noção, denominada *convergência em medida*, desempenha um papel fundamental em Análise Funcional, em Probabilidades e na teoria dos espaços L^p.

Definição 18.7 (Convergência em medida)**.** Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sucessão de funções μ-mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$. Diz-se que (f_n) converge para uma função f *em medida*, e escreve-se

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

Nota 18.8. A convergência em medida significa que, para qualquer tolerância $\varepsilon > 0$, o conjunto dos pontos onde $|f_n - f| > \varepsilon$ tem medida tendendo para zero quando $n \to \infty$. Não se exige, portanto, que a convergência ocorra em todos os pontos do espaço, mas apenas que o conjunto onde ela falha tenha medida cada vez menor.

A convergência quase em todo o ponto implica convergência em medida quando o espaço tem medida finita.

Proposição 18.9. *Se $\mu(X) < \infty$ e*

$$f_n \longrightarrow f \qquad \mu\text{-q.t.p.},$$

então

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

A recíproca não é verdadeira em geral.

Exemplo 18.10. Considere a sucessão de funções em $[0,1]$ $f_n = \chi_{I_n}$, onde (I_n) percorre sucessivamente todos os intervalos diádicos de $[0,1]$. Então

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0,$$

mas $(f_n(x))$ não converge para nenhum $x \in [0,1]$, pois cada ponto pertence a infinitos intervalos I_n e deixa de pertencer a infinitos outros.

Apesar disso, toda sucessão convergente em medida possui uma subsucessão que converge quase em todo o ponto.

Teorema 18.11. *Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$, então existe uma subsucessão (f_{n_k}) tal que*

$$f_{n_k} \longrightarrow f \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Exercício 105 (M)

Demonstrar que, se $\mu(X) < \infty$ e $f_k \to f$ μ-quase em todo o ponto, então $f_k \to f$ em medida.

Exercício 106 (M)

Demonstrar que, se $f_k \to f$ em medida, então existe uma subsucessão que converge μ-quase em todo o ponto.

Lema 18.12 (Aproximação por suporte de medida)**.** *Seja μ uma medida de Borel interior-regular nos abertos, e seja $A \subset X$ um conjunto aberto. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $\varphi \in \mathcal{C}_c(A)$ tal que*

$$0 \le \varphi \le 1, \qquad \operatorname{spt}(\varphi) \subset A, \qquad \mu\big(A \setminus \{\varphi = 1\}\big) < \varepsilon.$$

Em particular, φ aproxima χ_A em medida.

Demonstração. Pela regularidade interior de μ nos abertos, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Pelo Lema de Urysohn, como K é compacto e A é aberto, existe $\varphi \in \mathcal{C}_c(A)$ tal que

$$0 \le \varphi \le 1, \qquad \varphi \equiv 1 \text{ em } K, \qquad \operatorname{spt}(\varphi) \subset A.$$

Como $K \subset \{\varphi = 1\}$, segue que $A \setminus \{\varphi = 1\} \subset A \setminus K$. Consequentemente,

$$\mu\big(A \setminus \{\varphi = 1\}\big) \leq \mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Para justificar a última afirmação, seja $0 < \delta < 1$. Como $\varphi = 1$ em K e $0 \leq \varphi \leq 1$ em A, temos

$$\{x \in X : \ |\varphi(x) - \chi_A(x)| > \delta\} \subset A \setminus K.$$

Logo,

$$\mu\big(\{|\varphi - \chi_A| > \delta\}\big) < \varepsilon.$$

Assim, φ aproxima χ_A em medida. □

18.3 Hierarquia de mensurabilidade

Quando $X = \mathbb{R}^n$ é munido da topologia usual e da medida de Lebesgue, coexistem naturalmente três estruturas:

$$\mathcal{T}, \qquad \mathcal{B}, \qquad \mathcal{L},$$

onde $\mathcal{T}$ denota a topologia usual, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel e $\mathcal{L}$ a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis. Estas satisfazem as inclusões

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}.$$

Consequentemente, distinguem-se três classes fundamentais de funções.

Definição 18.13. Seja $f : E \to \mathbb{R}$.

1. Dizemos que f é **contínua** se
$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}, \qquad \forall\, U \in \mathcal{T}.$$
2. Dizemos que f é **Borel-mensurável** se
$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}, \qquad \forall\, U \in \mathcal{T}.$$
3. Dizemos que f é **Lebesgue-mensurável** se
$$f^{-1}(U) \in \mathcal{L}, \qquad \forall\, U \in \mathcal{T}.$$

Das inclusões

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$$

segue imediatamente que

$$\boxed{\text{função contínua} \Longrightarrow \text{função boreliana} \Longrightarrow \text{função Lebesgue-mensurável.}}$$

As duas implicações são, em geral, estritas.

Nota 18.14. Uma função $f : E \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável se, e somente se,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}.$$

Em contrapartida, para uma função Lebesgue-mensurável não é suficiente exigir que

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{L}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{L}.$$

A afirmação correta é

$$f \text{ é Lebesgue-mensurável} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{L}, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}.$$

Exemplo 18.15. A função característica dos números racionais,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é Borel-mensurável, uma vez que $\mathbb{Q}$ é um conjunto boreliano de $\mathbb{R}$. Contudo, $\chi_{\mathbb{Q}}$ não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

18.4 Composição de funções mensuráveis

A composição preserva a mensurabilidade sempre que a função exterior é Borel-mensurável.

Proposição 18.16 (Composição de funções mensuráveis)**.** *Sejam*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

1. *Se f é Lebesgue-mensurável e g é Borel-mensurável, então $g \circ f$ é Lebesgue-mensurável.*
2. *Se f e g são Borel-mensuráveis, então $g \circ f$ é Borel-mensurável.*
3. *Em geral, a composição de duas funções Lebesgue-mensuráveis pode não ser Lebesgue-mensurável.*

Exercício 107 (F)

Demonstrar as seguintes afirmações.

1. Se g é Borel-mensurável e f é Lebesgue-mensurável, então $g \circ f$ é Lebesgue-mensurável.
2. Se f e g são Borel-mensuráveis, então $g \circ f$ é Borel-mensurável.

As funções monótonas fornecem uma importante classe de exemplos de funções Borel-mensuráveis.

Lema 18.17. *Toda função monótona $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Borel-mensurável.*

Demonstração. Suponhamos que f é crescente; o caso decrescente é inteiramente análogo. Seja $a \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$E_a = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) < a\}$$

é um intervalo (eventualmente vazio ou igual a $\mathbb{R}$). De facto, se $x < y$ e $y \in E_a$, então

$$f(x) \leq f(y) < a,$$

pelo que $x \in E_a$. Como todo intervalo é um conjunto boreliano de $\mathbb{R}$, segue que

$$f^{-1}(]-\infty, a[) = E_a$$

é boreliano para todo $a \in \mathbb{R}$. Pela caracterização da mensurabilidade boreliana, concluímos que f é Borel-mensurável. □

18.5 Teorema de Lusin

O Teorema de Lusin estabelece uma das ligações mais profundas entre a Topologia e a Teoria da Medida. Apesar de uma função mensurável poder apresentar um número muito grande de descontinuidades, ela coincide, fora de um conjunto de medida arbitrariamente pequena, com uma função contínua. A demonstração utiliza o facto de o contradomínio admitir uma base numerável de abertos.

Definição 18.18 (Espaço de segunda contagem)**.** Um espaço topológico Y diz-se **de segunda contagem** se existe uma família numerável de abertos

$$(B_i)_{i \geq 1}$$

tal que todo aberto $B \subset Y$ pode ser escrito como união de elementos dessa família.

Exemplo 18.19. Os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, munidos da topologia usual, são de segunda contagem.

Nota 18.20. Em espaços métricos verifica-se a equivalência

$$\text{separável} \iff \text{de segunda contagem.}$$

Em particular, todos os espaços euclidianos satisfazem esta propriedade.

Teorema 18.21 (Teorema de Lusin)**.** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff munido de uma medida de Radon finita μum espaço topológico de Hausdorff munido, e seja Y um espaço topológico de segunda contagem. Se $f : X \to Y$ é mensurável, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ e a restrição*

$$f|_K : K \to Y$$

é contínua.

Demonstração. Seja $(B_i)_{i \geq 1}$ uma base numerável da topologia de Y. Para cada $i \geq 1$, definamos

$$A_i^+ = f^{-1}(B_i), \qquad A_i^- = f^{-1}(B_i^c).$$

Nikolai Luzin
(1883–1950)

Como f é mensurável, os conjuntos A_i^+ e A_i^- são mensuráveis. Além disso,

$$A_i^+ \cap A_i^- = \varnothing, \qquad A_i^+ \cup A_i^- = X.$$

Pela interior-regularidade de μ, existem compactos

$$K_i^+ \subset A_i^+, \qquad K_i^- \subset A_i^-,$$

tais que

$$\mu(A_i^+ \setminus K_i^+) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \qquad \mu(A_i^- \setminus K_i^-) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Definamos

$$K_i = K_i^+ \cup K_i^-, \qquad K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Cada K_i é compacto. Como X é de Hausdorff, os conjuntos compactos são fechados; por conseguinte, K é um subconjunto fechado de K_1 e é, portanto, compacto. Para cada $i \geq 1$, temos

$$X \setminus K_i = (A_i^+ \setminus K_i^+) \cup (A_i^- \setminus K_i^-).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mu(X \setminus K) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X \setminus K_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mu(A_i^+ \setminus K_i^+) + \mu(A_i^- \setminus K_i^-)\right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Resta demonstrar que $f|_K$ é contínua. Como $(B_i)_{i\geq 1}$ é uma base da topologia de Y, basta mostrar que

$$(f|_K)^{-1}(B_i) = f^{-1}(B_i) \cap K$$

é aberto em K, para todo $i \geq 1$. Equivalentemente, basta provar que o seu complementar em K,

$$f^{-1}(B_i^c) \cap K,$$

é fechado em K. Ora, como $K \subset K_i^+ \cup K_i^-$, com

$$K_i^+ \subset A_i^+, \qquad K_i^- \subset A_i^-,$$

e $A_i^+ \cap A_i^- = \varnothing$, temos

$$f^{-1}(B_i^c) \cap K = A_i^- \cap K = K_i^- \cap K.$$

O conjunto $K_i^- \cap K$ é compacto e, como K é de Hausdorff, é fechado em K. Logo, $f|_K$ é contínua. □

Nota 18.22. O Teorema de Lusin mostra que uma função mensurável pode ser aproximada por uma função contínua do ponto de vista da medida. Em particular, as descontinuidades de uma função mensurável ficam confinadas a um conjunto de medida arbitrariamente pequena.

Exemplo 18.23. A função característica dos racionais, $\chi_{\mathbb{Q}}$, não satisfaz as hipóteses do teorema, pois não é Lebesgue-mensurável restrita a um compacto onde se torne contínua: qualquer compacto de medida positiva contém simultaneamente números racionais e irracionais. Em contrapartida, a função característica de um intervalo $[a, b]$ satisfaz a conclusão do teorema, bastando eliminar uma vizinhança arbitrariamente pequena dos extremos.

Nota 18.24. O Teorema de Lusin não afirma que f, considerada como função definida em todo o espaço X, seja contínua nos pontos de K. Afirma apenas que a restrição $f|_K : K \to Y$, quando K é munido da topologia induzida por X, é contínua.

Nota 18.25. O Teorema de Lusin estabelece uma ponte entre a teoria da medida e a Topologia. Embora uma função mensurável possa ser altamente descontínua, ela é contínua quando restringida a um compacto cujo complemento tem medida arbitrariamente pequena. Este resultado mostra que, do ponto de vista da medida, as funções mensuráveis diferem muito pouco das funções contínuas.

Exercício 108 (F)

Demonstrar a versão forte do Teorema de Lusin:
Seja X um espaço métrico munido de uma medida regular μ, e seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ e existe uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f = g \qquad \text{em } K.$$

Exercício 109 (F)

Seja $f \in L^1(\lambda)$ e seja $\varepsilon > 0$. Demonstrar que existe uma função contínua $g \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Nota histórica

A noção moderna de função mensurável surgiu naturalmente com a construção da integral de Lebesgue, apresentada em 1902. Esta nova classe de funções permitiu alargar profundamente o domínio da integração, ultrapassando as limitações impostas pela continuidade e pela integrabilidade de Riemann. O Teorema de Lusin [52], estabelecido no início do século XX, revelou uma propriedade fundamental das funções mensuráveis: num espaço de medida regular e finita, uma função mensurável torna-se contínua depois de se retirar do domínio um conjunto de medida arbitrariamente pequena. Este resultado constitui uma ligação particularmente profunda entre a Topologia e a Teoria da Medida. A convergência em medida, desenvolvida no contexto dos trabalhos de Frigyes Riesz [64] sobre espaços de funções, tornou-se igualmente uma das noções centrais da Análise moderna. Situa-se entre a convergência quase em toda a parte e as convergências em norma, desempenhando um papel importante na Teoria da Medida, na Probabilidade e no estudo dos espaços L^p.

Nota bibliográfica

Para o estudo das funções mensuráveis, da convergência em medida e do Teorema de Lusin, podem consultar-se *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B. Folland [31], *Measure Theory*, de P. R. Halmos [36], e *Measure Theory*, de V. I. Bogachev [8]. O Teorema de Lusin e as suas relações com a regularidade das medidas, a aproximação por funções contínuas e a densidade das funções contínuas nos espaços L^p são igualmente apresentados em *Real and Complex Analysis*, de W. Rudin [68], e em *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*, de M. Willem [77].

Capítulo 19

Teoremas de representação de Riesz

Ao longo deste capítulo assumimos que X é um espaço Hausdorff localmente compacto. O objetivo é estabelecer os principais teoremas de representação de Riesz, que identificam funcionais lineares contínuos em espaços de funções contínuas com medidas de Radon. Esta correspondência constitui uma ponte fundamental entre a Análise Funcional e a Teoria da Medida. Começamos por recordar uma versão do lema de Urysohn adaptada ao contexto dos espaços Hausdorff localmente compactos. Em seguida, demonstramos o teorema de Riesz–Markov para $\mathcal{C}_0(X)$, estendemo-lo ao espaço $\mathcal{C}_c(X)$ e deduzimos o teorema de Riesz–Kakutani. Finalmente, mostramos como o teorema de representação permite reconstruir a integral de Lebesgue a partir da integral de Riemann.

A demonstração do teorema de Riesz utilizará apenas a seguinte consequência do lema de Urysohn, válida em espaços Hausdorff localmente compactos.

Teorema 19.1 (Lema de Urysohn em espaços localmente compactos Hausdorff)**.** *Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. Sejam*

$$K \subset U \subset X,$$

onde K é compacto e U é aberto. Então existe uma função $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que

$$0 \leq f \leq 1, \qquad f = 1 \text{ em } K, \qquad \operatorname{spt}(f) \subset U.$$

Este resultado é clássico e será utilizado repetidamente ao longo deste capítulo.

19.1 Teorema de Riesz–Markov

O objetivo desta secção é mostrar que todo funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(X)$ pode ser representado de forma única como integração relativamente a uma medida de Radon finita. Esta correspondência estabelece uma identificação isométrica entre o dual de $\mathcal{C}_0(X)$ e o espaço das medidas de Radon finitas. A estratégia da demonstração consiste em construir explicitamente a medida associada ao funcional, provar a fórmula de representação integral e, por fim, identificar a norma do funcional.

Teorema 19.2 (Teorema de Riesz–Markov)**.** *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto e $u \in \mathcal{C}_0(X)'$. Então existe uma única medida de Radon finita $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que*

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_0(X).$$

Além disso,

$$\|u\| = \|\mu\| = |\mu|(X).$$

Demonstração. Todo funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(X)$ pode ser escrito como diferença de dois funcionais lineares contínuos e positivos. Basta, portanto, demonstrar inicialmente o resultado no caso em que $u \geq 0$.

Passo 1. Construção e finitude da medida. Pelo Teorema 15.6, o funcional positivo u define uma medida de Radon positiva μ_u tal que, para todo aberto $U \subset X$,

$$\mu_u(U) = \sup\{u(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(X),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ \operatorname{spt}(\varphi) \subset U\}. \tag{1}$$

Em particular, para toda função admissível na definição de $\mu_u(X)$,

$$u(\varphi) \leq \|u\|\,\|\varphi\|_\infty \leq \|u\|.$$

Tomando o supremo, $\mu_u(X) \leq \|u\| < \infty$. Logo, μ_u é uma medida de Radon positiva e finita.

Passo 2. Fórmula de representação para funções positivas de suporte compacto. Seja

$$f \in \mathcal{C}_c(X), \qquad f \geq 0,$$

e seja $M := \|f\|_\infty$. Se $M = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos $M > 0$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e coloquemos $\delta := \frac{M}{n}$. Para $k = 1, \ldots, n$, definamos os abertos

$$U_k := \{x \in X : f(x) > (k-1)\delta\}. \tag{3}$$

Definamos ainda

$$F(t) := \mu_u(\{f > t\}), \qquad 0 \leq t \leq M.$$

A função F é decrescente e, pela fórmula de Cavalieri,

$$\int_X f \, d\mu_u = \int_0^M F(t)\, dt.$$

Como $M = n\delta$, as somas de Riemann inferior e superior de F satisfazem

$$\delta \sum_{k=1}^{n} F(k\delta) \leq \int_0^M F(t)\, dt \leq \delta \sum_{k=1}^{n} F((k-1)\delta).$$

Além disso,

$$\delta \sum_{k=1}^{n} \big(F((k-1)\delta) - F(k\delta)\big) = \delta\big(F(0) - F(M)\big) \leq \delta\, \mu_u(\{f > 0\}).$$

Como $F((k-1)\delta) = \mu_u(U_k)$, concluímos que

$$\int_X f\,d\mu_u \leq \delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u(U_k) \leq \int_X f\,d\mu_u + \delta\,\mu_u(\{f>0\}).$$

• Mostremos agora que

$$\int_X f\,d\mu_u \leq u(f).$$

Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de $\mu_u(U_k)$, para cada $k = 1, \ldots, n$, existe

$$\varphi_k \in \mathcal{C}_c(X), \qquad 0 \leq \varphi_k \leq 1, \qquad \operatorname{spt}(\varphi_k) \subset U_k,$$

tal que

$$u(\varphi_k) \geq \mu_u(U_k) - \frac{\varepsilon}{n\delta}.$$

Definamos

$$g := \delta \sum_{k=1}^{n} \varphi_k.$$

Para todo $x \in X$, se $\varphi_k(x) \neq 0$, então

$$x \in \operatorname{spt}(\varphi_k) \subset U_k,$$

e, pela definição de U_k,

$$f(x) > (k-1)\delta.$$

Como $0 \leq \varphi_k \leq 1$,

$$g(x) = \delta \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \leq \delta \left(\left\lfloor \frac{f(x)}{\delta} \right\rfloor + 1 \right) \leq f(x) + \delta.$$

Como

$$K = \operatorname{spt}(f) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{spt}(\varphi_k)$$

é compacto, existe, pelo lema de Urysohn,

$$\psi \in \mathcal{C}_c(X), \qquad 0 \leq \psi \leq 1, \qquad \psi = 1 \text{ em } K.$$

Assim, $g \leq f + \delta\psi$. Pela positividade de u,

$$u(g) \leq u(f) + \delta u(\psi).$$

Por outro lado,

$$u(g) = \delta \sum_{k=1}^{n} u(\varphi_k) \geq \delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u(U_k) - \varepsilon.$$

Combinando as duas estimativas anteriores, obtemos

$$\delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u(U_k) - \varepsilon \leq u(f) + \delta u(\psi).$$

Como

$$\int_X f\,d\mu_u \le \delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u(U_k),$$

segue que

$$\int_X f\,d\mu_u - \varepsilon \le u(f) + \delta u(\psi).$$

Fazendo primeiro $\varepsilon \to 0$ e depois $n \to \infty$, isto é, $\delta = M/n \to 0$, concluímos que

$$\int_X f\,d\mu_u \le u(f). \tag{8}$$

• Mostremos agora a desigualdade inversa. Para $k = 1, \ldots, n$, definamos

$$r_k := \min\left\{\delta,\ \big(f - (k-1)\delta\big)^+\right\}.$$

Então

$$r_k \in \mathcal{C}_c(X), \qquad 0 \le r_k \le \delta,$$

e $f = \sum_{k=1}^{n} r_k$. Fixado $\eta > 0$, tem-se

$$\operatorname{spt}(r_k) \subset \{f > (k-1)\delta - \eta\}.$$

Como $0 \le \frac{r_k}{\delta} \le 1$, pela definição de μ_u,

$$u(r_k) \le \delta\,\mu_u\big(\{f > (k-1)\delta - \eta\}\big).$$

Consequentemente,

$$u(f) \le \delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u\big(\{f > (k-1)\delta - \eta\}\big).$$

Fazendo $\eta \downarrow 0$ e usando a continuidade por cima da medida, obtemos

$$u(f) \le \delta \sum_{k=1}^{n} \mu_u\big(\{f \ge (k-1)\delta\}\big).$$

Por outro lado,

$$\mu_u\big(\{f \ge (k-1)\delta\}\big) - \mu_u\big(\{f > (k-1)\delta\}\big) = \mu_u\big(\{f = (k-1)\delta\}\big).$$

Como os conjuntos de nível $\{f = t\}$ são disjuntos, existe no máximo um número enumerável de $t \in [0, M]$ para os quais $\mu_u(\{f = t\}) > 0$. Assim, as funções

$$t \longmapsto \mu_u(\{f \ge t\}) \quad \text{e} \quad t \longmapsto \mu_u(\{f > t\})$$

coincidem quase em toda a parte e, portanto, têm a mesma integral. Fazendo agora $n \to \infty$, as somas de Riemann convergem para

$$\int_0^M \mu_u(\{f > t\})\,dt = \int_X f\,d\mu_u,$$

pela fórmula de Cavalieri. Logo,

$$u(f) \le \int_X f\,d\mu_u.$$

Juntamente com a desigualdade (8), concluímos que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu_u, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X),\ f \geq 0.$$

Passo 4. Norma do funcional. Mostremos que $\|u\| = \mu_u(X)$. Para todo $f \in \mathcal{C}_0(X)$, pela fórmula de representação,

$$|u(f)| = \left| \int_X f \, d\mu_u \right| \leq \int_X |f| \, d\mu_u \leq \|f\|_\infty \, \mu_u(X).$$

Logo, $\|u\| \leq \mu_u(X)$. Reciprocamente, seja $\varepsilon > 0$. Pela regularidade interior de μ_u, existe um compacto $K \subset X$ tal que

$$\mu_u(K) \geq \mu_u(X) - \varepsilon.$$

Pelo lema de Urysohn, existe

$$\psi \in \mathcal{C}_c(X), \qquad 0 \leq \psi \leq 1, \qquad \psi = 1 \text{ em } K.$$

Como $\|\psi\|_\infty \leq 1$, temos

$$\|u\| \geq u(\psi) = \int_X \psi \, d\mu_u \geq \mu_u(K) \geq \mu_u(X) - \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\|u\| \geq \mu_u(X)$. Portanto, $\|u\| = \mu_u(X)$. **Passo 5. Unicidade da medida.** Seja ν outra medida de Radon positiva em X tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\nu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Mostremos que $\nu = \mu_u$. Seja $U \subset X$ aberto. Pela definição de μ_u,

$$\mu_u(U) = \sup \{ u(\varphi) : \varphi \in \mathcal{C}_c(X),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ \operatorname{spt}(\varphi) \subset U \}.$$

Como

$$u(\varphi) = \int_X \varphi \, d\nu,$$

segue que

$$\mu_u(U) = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\nu : \varphi \in \mathcal{C}_c(X),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ \operatorname{spt}(\varphi) \subset U \right\}.$$

Pela regularidade interior de ν, este supremo é igual a $\nu(U)$. Logo,

$$\mu_u(U) = \nu(U), \qquad \forall\, U \subset X \text{ aberto.}$$

Como ambas as medidas são de Radon e coincidem em todos os abertos, coincidem em todos os conjuntos de Borel. Portanto, $\mu_u = \nu$. A demonstração está completa.

□

> *Nota* 19.3. Acabamos de demonstrar que, a cada funcional $u \in \big(\mathcal{C}_0(X)\big)'$, corresponde

uma única medida de Radon finita μ_u tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu_u, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_0(X).$$

Reciprocamente, se μ é uma medida de Radon finita em X, então a aplicação

$$u_\mu : \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u_\mu(f) := \int_X f \, d\mu,$$

é um funcional linear e contínuo. Além disso, $\|u_\mu\| = |\mu|(X)$.
Assim, o teorema de Riesz–Markov estabelece uma correspondência isométrica entre o dual de $\mathcal{C}_0(X)$ e o espaço das medidas de Radon finitas em X.

19.2 Convergência e dualidade em $\mathcal{C}_c(X)$

Nota 19.4 (Densidade de $\mathcal{C}_c(X)$ em $\mathcal{C}_0(X)$). Suponhamos que X seja σ-compacto e seja

$$(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

uma exaustão de X por abertos relativamente compactos, isto é,

$$X_j \subset X_{j+1}, \qquad \overline{X_j} \text{ compacto}, \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X.$$

Para cada j, pelo lema de Urysohn, existe $\chi_j \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que

$$0 \le \chi_j \le 1, \qquad \chi_j = 1 \text{ em } \overline{X_j}.$$

Seja $f \in \mathcal{C}_0(X)$ e definamos $f_j := f\chi_j$. Então $f_j \in \mathcal{C}_c(X)$. Além disso, $f_j - f = f(\chi_j - 1)$. Como $\chi_j = 1$ em $\overline{X_j}$, temos

$$|f_j(x) - f(x)| \le |f(x)| \qquad \text{para } x \in X \setminus X_j.$$

Logo,

$$\|f_j - f\|_\infty \le \sup_{x\in X\setminus X_j} |f(x)|.$$

Como $f \in \mathcal{C}_0(X)$, o segundo membro tende para zero quando $j \to \infty$. Portanto, $\|f_j - f\|_\infty \longrightarrow 0$. Assim, $\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $\mathcal{C}_0(X)$ relativamente à norma do supremo.

Se $u : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{R}$ é contínuo, então $u(f_j) \to u(f)$.

Definição 19.5 (Topologia de $\mathcal{C}_c(X)$)**.** Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Para cada compacto $K \subset X$, definimos

$$\mathcal{C}_K(X) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c(X) : \operatorname{spt}(\varphi) \subset K\},$$

munido da norma do supremo. A topologia de $\mathcal{C}_c(X)$ é a topologia indutiva gerada pelos espaços $\mathcal{C}_K(X)$. Equivalentemente, uma sucessão $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_c(X)$ converge para

$\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ se existe um compacto $K \subset X$ tal que

$$\operatorname{spt}(\varphi_n) \subset K, \qquad \operatorname{spt}(\varphi) \subset K, \qquad \forall n,$$

e

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty := \sup_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \longrightarrow 0.$$

Nota 19.6. Ao contrário de $\mathcal{C}_0(X)$, o espaço $\mathcal{C}_c(X)$ não é um espaço de Banach nem é normável quando X não é compacto. Consequentemente, a continuidade de um funcional linear

$$u : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

não pode ser expressa por uma única constante global. Mais precisamente, u é contínuo se, e somente se, para todo compacto $K \subset X$, existe uma constante $C_K > 0$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_\infty, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c(X),\ \operatorname{spt}(\varphi) \subset K.$$

É precisamente esta noção de continuidade que intervém no teorema de Riesz–Markov–Kakutani.

Corolário 19.7 (Dualidade em $\mathcal{C}_c(X)$)**.** *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. A cada funcional linear e contínuo*

$$u : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

corresponde uma única medida de Radon, possivelmente não finita em X, tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Além disso, para cada compacto $K \subset X$, existe uma constante $C_K > 0$ tal que

$$|u(f)| \leq C_K \|f\|_\infty, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X) \quad \textit{com} \quad \operatorname{spt}(f) \subset K.$$

Demonstração. Fixemos um compacto $K \subset X$ e consideremos o subespaço

$$\mathcal{C}_K(X) := \{f \in \mathcal{C}_c(X) : \operatorname{spt}(f) \subset K\}.$$

Munido da norma do supremo, $\mathcal{C}_K(X)$ é um espaço normado. A continuidade de u em $\mathcal{C}_c(X)$ implica que a sua restrição

$$u_K := u|_{\mathcal{C}_K(X)}$$

é contínua relativamente à norma do supremo. Portanto, existe uma constante $C_K > 0$ tal que

$$|u(f)| \leq C_K \|f\|_\infty, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_K(X).$$

Aplicando localmente o teorema de Riesz–Markov, obtemos, para cada compacto K, uma medida de Radon finita μ_K tal que

$$u(f) = \int_K f \, d\mu_K, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_K(X).$$

Se $K_1 \subset K_2$, a unicidade no teorema de Riesz–Markov implica que $\mu_{K_2}|_{K_1} = \mu_{K_1}$. As medidas μ_K são, portanto, compatíveis e definem uma única medida de Radon μ em X tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X).$$

A unicidade de μ decorre da unicidade das suas restrições a todos os compactos de X. □

Nota 19.8. Alguns autores, nomeadamente na tradição de Bourbaki, definem directamente uma medida de Radon como um funcional linear e contínuo em $\mathcal{C}_c(X)$. Na presente exposição seguimos o caminho inverso: construímos primeiro as medidas por métodos de teoria da medida e, em seguida, demonstramos que estas são exactamente os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{C}_c(X)$. Esta abordagem evidencia o conteúdo do teorema de representação de Riesz–Kakutani.

Lema 19.9. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Todo funcional linear positivo*

$$u : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínuo relativamente à topologia de $\mathcal{C}_c(X)$.

Demonstração. Seja $K \subset X$ um compacto. Pelo lema de Urysohn, existe $\psi \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que

$$0 \le \psi \le 1, \qquad \psi = 1 \quad \text{em } K.$$

Se $f \in \mathcal{C}_c(X)$ satisfaz $\operatorname{spt}(f) \subset K$, então $-\|f\|_\infty \psi \le f \le \|f\|_\infty \psi$. Pela positividade de u,

$$-\|f\|_\infty u(\psi) \le u(f) \le \|f\|_\infty u(\psi),$$

pelo que $|u(f)| \le u(\psi)\,\|f\|_\infty$. Assim, a restrição de u às funções suportadas em K é contínua para a norma do supremo. Como isto vale para todo compacto K, conclui-se que u é contínuo na topologia de $\mathcal{C}_c(X)$. □

Teorema 19.10 (Riesz–Kakutani)**.** *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto.*
A cada funcional linear positivo $u : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ corresponde uma única medida de Radon positiva μ tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Reciprocamente, toda medida de Radon positiva define, pela integração, um funcional linear positivo em $\mathcal{C}_c(X)$.

Demonstração. Pelo lema anterior, todo funcional linear positivo em $\mathcal{C}_c(X)$ é contínuo relativamente à topologia de $\mathcal{C}_c(X)$. Pode então aplicar-se o teorema de representação

demonstrado na secção anterior para funcionais lineares contínuos em $\mathcal{C}_c(X)$, obtendo-se uma única medida de Radon positiva μ tal que

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(X).$$

A recíproca é imediata, pois a integração relativamente a uma medida de Radon positiva define um funcional linear positivo. □

19.3 Integral de Lebesgue pelo teorema de Riesz–Markov

A representação de Riesz permite interpretar a integral de Riemann como um funcional positivo sobre $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. A medida de Radon associada a esse funcional recupera precisamente o volume euclidiano e conduz, após completamento, à medida de Lebesgue.

Teorema 19.11 (Integral de Lebesgue por Riesz)**.** *Considere-se o funcional*

$$u : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx,$$

onde a integral do segundo membro é entendida no sentido de Riemann.
Então existe uma única medida de Radon positiva μ em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, μ coincide com a medida de Borel associada ao volume euclidiano. A completude de μ é a medida de Lebesgue.

Demonstração. A linearidade de u segue da linearidade da integral de Riemann. Além disso, se $f \geq 0$, então

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \geq 0,$$

pelo que u é positivo. Mostremos que u é contínuo na topologia de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e seja R um rectângulo compacto contendo K. Para toda função $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{spt}(f) \subset K$, temos

$$|u(f)| \leq \int_K |f(x)|\, dx \leq |R|\, \|f\|_\infty,$$

onde $|R|$ denota o volume euclidiano de R. Assim, a restrição de u às funções suportadas em K é contínua relativamente à norma do supremo. Como isto vale para todo compacto K, o funcional u é contínuo em $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema de representação de Riesz–Markov, existe uma única medida de Radon positiva μ tal que

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Seja $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ um rectângulo compacto. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos

$$R_\varepsilon^- = [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon] \times \cdots \times [a_n + \varepsilon, b_n - \varepsilon]$$

e

$$R_\varepsilon^+ = (a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon).$$

Então $R_\varepsilon^- \subset \operatorname{int}(R) \subset R \subset R_\varepsilon^+$. Pelo lema de Urysohn, existem funções $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1, \qquad \varphi_\varepsilon = 1 \quad \text{em } R_\varepsilon^-, \qquad \operatorname{spt}(\varphi_\varepsilon) \subset \operatorname{int}(R),$$

e

$$0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1, \qquad \psi_\varepsilon = 1 \quad \text{em } R, \qquad \operatorname{spt}(\psi_\varepsilon) \subset R_\varepsilon^+.$$

Consequentemente,

$$\chi_{R_\varepsilon^-} \leq \varphi_\varepsilon \leq \chi_R \leq \psi_\varepsilon \leq \chi_{R_\varepsilon^+}.$$

Pela monotonia do integral relativamente à medida μ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_R \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon \, d\mu.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_R \, d\mu = \mu(R),$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu \leq \mu(R) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon \, d\mu.$$

Pela propriedade de representação,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, d\mu = u(\varphi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) \, dx$$

e, analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) \, dx.$$

Assim,

$$|R_\varepsilon^-| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) \, dx \leq \mu(R) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) \, dx \leq |R_\varepsilon^+|.$$

Fazendo $\varepsilon \downarrow 0$, temos $|R_\varepsilon^-| \longrightarrow |R|$, $|R_\varepsilon^+| \longrightarrow |R|$, e, portanto, $\mu(R) = |R|$. Logo, μ coincide com a medida de volume euclidiano nos rectângulos compactos. Pela unicidade das medidas de Borel localmente finitas que coincidem nos rectângulos, μ coincide com a medida de Borel associada ao volume euclidiano. O seu completamento é a medida de Lebesgue. □

19.4 Medidas de Radon

Definição 19.12. Denotemos por

$$\mathcal{M}(X) := \big(\mathcal{C}_c(X)\big)'$$

o espaço das medidas de Radon em X. Denotemos ainda por

$$\mathcal{M}_b(X) := \big(\mathcal{C}_0(X)\big)'$$

o subespaço das medidas de Radon finitas.

Nota 19.13. Como $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{C}_0(X)$, toda medida de Radon finita é, em particular, uma medida de Radon.
Em geral, uma medida de Radon não precisa de ser finita sobre todo o espaço X; exige-se apenas que seja finita sobre os compactos. Quando X é compacto, tem-se $\mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_0(X)$, e, consequentemente,

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}_b(X).$$

19.5 Resumo do teorema de representação

Os resultados anteriores conduzem às duas formas fundamentais do teorema de representação de Riesz.

Teorema 19.14 (Espaço $\mathcal{C}_0(X)$)**.** *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Todo funcional linear contínuo $u \in (\mathcal{C}_0(X))'$ é da forma*

$$u(f) = \int_X f \, d\mu,$$

onde μ é uma única medida de Radon finita. Além disso, $\|u\| = |\mu|(X)$.

Teorema 19.15 (Espaço $\mathcal{C}_c(X)$)**.** *Todo funcional linear positivo $u : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ é representado por uma única medida de Radon positiva,*

$$u(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Nota 19.16. No espaço $\mathcal{C}_c(X)$, não existe uma noção global de limitação relativamente a uma única norma. A hipótese de positividade é particularmente natural, pois implica automaticamente a continuidade em cada subespaço de funções com suporte contido num compacto fixo. Obtém-se então uma medida de Radon positiva, finita nos compactos, mas não necessariamente finita em todo o espaço. Mais geralmente, os funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{C}_c(X)$, munido da topologia do limite indutivo, são representados por medidas de Radon com sinal, localmente finitas.

Em ambos os casos, a representação é dada por

$$u(f) = \int_X f \, d\mu.$$

No caso de $\mathcal{C}_0(X)$, tem-se ainda $\|u\| = |\mu|(X)$. No caso de $\mathcal{C}_c(X)$, não existe uma fórmula global para a norma, pois $\mathcal{C}_c(X)$, munido da topologia do limite indutivo, não é em geral um espaço normado.

	$\mathcal{C}_0(X)$	$\mathcal{C}_c(X)$
Estrutura	espaço de Banach	espaço localmente convexo
Funcionais considerados	lineares contínuos	lineares positivos
Medida associada	medida de Radon finita com sinal	medida de Radon positiva, finita nos compactos
Representação	$u(f) = \int_X f \, d\mu$	$u(f) = \int_X f \, d\mu$
Norma	$\|u\| = \|\mu\|(X)$	não existe uma norma global

Exercício 110 (D)

Seja $\mu := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{x_i}$, onde $x_i \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado. Demonstrar que μ é uma medida de Radon se e somente se $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ é absolutamente convergente.

Nota histórica

O primeiro teorema de representação deste tipo foi demonstrado por Frigyes Riesz, em 1909, para funcionais lineares contínuos definidos sobre o espaço das funções contínuas num intervalo compacto. A representação era expressa por meio de um integral de Riemann–Stieltjes relativamente a uma função de variação limitada [64]. O resultado foi posteriormente generalizado por A. A. Markov, em 1938, a determinados espaços não compactos [59]. Em 1941, Shizuo Kakutani obteve uma representação dos espaços M abstratos como espaços de funções contínuas sobre espaços compactos de Hausdorff [58]. Estes desenvolvimentos estão na origem das formulações modernas do Teorema de Representação de Riesz–Markov–Kakutani para espaços localmente compactos de Hausdorff.

Nota bibliográfica

O Teorema de Representação de Riesz–Markov–Kakutani é um resultado clássico da Análise Funcional e pode ser encontrado em *Real and Complex Analysis*, de W. Rudin [68], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B. Folland [31], *A Course in Functional Analysis*, de J. B. Conway [19], e *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de H. Brezis [12]. Pode ainda consultar-se *Measure Theory*, de V. I. Bogachev [8], onde a teoria das medidas de Radon é desenvolvida em maior generalidade.

Capítulo 20

Topologia fraca-* das medidas de Radon

O Teorema de Representação de Riesz–Markov estabelece uma correspondência entre medidas de Radon limitadas e funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{C}_0(X)$. Esta identificação permite considerar o espaço das medidas $\mathcal{M}_b(X)$ como um espaço dual e dotá-lo naturalmente da topologia fraca-*.

O objetivo deste capítulo é estudar esta topologia e as suas principais propriedades de compacidade e convergência. Veremos, em particular, que famílias de medidas uniformemente limitadas admitem subsucessãos fracamente-* convergentes e apresentaremos uma versão vaga do teorema de de la Vallée Poussin. Estes resultados desempenham um papel fundamental em numerosas áreas da Análise, nomeadamente na teoria das equações diferenciais parciais, no cálculo das variações, na teoria do potencial e na teoria das probabilidades.

Definição 20.1 (Convergência vaga e convergência fraca-*)**.** Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto.

1. Se $(\mu_i) \subset M(X)$, dizemos que
$$\mu_i \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$$
vagamente se
$$\int_X \varphi \, d\mu_i \longrightarrow \int_X \varphi \, d\mu, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c(X).$$
A convergência definida através das funções de teste de $\mathcal{C}_c(X)$ é tradicionalmente designada por *convergência vaga*.
2. Se $(\mu_i) \subset M_b(X)$, dizemos que
$$\mu_i \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$$
*fracamente-** se
$$\int_X f \, d\mu_i \longrightarrow \int_X f \, d\mu, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_0(X).$$

Nota 20.2. As duas topologias introduzidas acima correspondem exatamente aos dois teoremas de representação estabelecidos no capítulo anterior. A convergência vaga é a topologia fraca-* do dual de $\mathcal{C}_c(X)$, identificado com $\mathcal{M}(X)$. A convergência fraca-* em $\mathcal{M}_b(X)$ é a topologia fraca-* do dual de $\mathcal{C}_0(X)$, identificado com $\mathcal{M}_b(X)$.

20.1 Compacidade fraca-* em $\mathcal{M}_b(X)$

A demonstração do resultado de compacidade baseia-se inicialmente na construção de um funcional linear a partir de um subconjunto denso de $\mathcal{C}_c(X)$. Para justificar a sua extensão a todo o espaço, utilizaremos o seguinte lema de extensão de aplicações Lipschitz.

Lema 20.3 (Extensão de aplicações Lipschitz)**.** *Sejam E um espaço métrico, $D \subset E$ um subconjunto denso e $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação Lipschitz, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$|F(x) - F(y)| \leq L\, d(x, y), \qquad \forall x, y \in D.$$

Então existe uma única aplicação Lipschitz $\widetilde{F} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{F}|_D = F$. Além disso,

$$\mathrm{Lip}(\widetilde{F}) = \mathrm{Lip}(F).$$

Demonstração. Seja $x \in E$. Como D é denso, existe uma sucessão $(x_n) \subset D$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Pela condição de Lipschitz, $|F(x_n) - F(x_m)| \leq L\, d(x_n, x_m)$, logo $(F(x_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Definamos

$$\widetilde{F}(x) := \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

É imediato que esta definição não depende da sucessão escolhida. De facto, se $(y_n) \subset D$ também converge para x,

$$|F(x_n) - F(y_n)| \leq L\, d(x_n, y_n) \longrightarrow 0.$$

Finalmente, passando ao limite na desigualdade de Lipschitz, obtemos

$$|\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(y)| \leq L\, d(x, y), \qquad \forall x, y \in E.$$

Logo $\widetilde{F}$ é Lipschitz. A unicidade segue da densidade de D. □

Teorema 20.4 (de la Vallée Poussin)**.** *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e de segunda contagem. Seja $(\mu_k) \subset \mathcal{M}_b(X)$ tal que*

$$\sup_k |\mu_k|(X) < \infty.$$

Então existe uma subsucessão (μ_{k_j}) e uma medida $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ tais que

$$\mu_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$$

na topologia fraca- de $\mathcal{M}_b(X)$.*

Demonstração. **Passo 1. (Extração diagonal).** Como $\mathcal{C}_0(X)$ é separável na norma do supremo, existe um subconjunto denso numerável $(\varphi_i) \subset \mathcal{C}_0(X)$. Para cada i,

$$\left(\int_X \varphi_i \, d\mu_k\right)_k$$

é limitada, pois

$$\left|\int_X \varphi_i \, d\mu_k\right| \leq \|\varphi_i\|_\infty |\mu_k|(X).$$

Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass, extraindo sucessivamente subsucessões, obtemos uma subsucessão diagonal ν_k tal que, para todo i,

$$\int_X \varphi_i \, d\nu_k$$

converge. Definamos

$$F(\varphi_i) := \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_i \, d\nu_k.$$

Passo 2. (Construção do funcional). Da estimativa anterior segue que

$$|F(\varphi_i)| \leq m\|\varphi_i\|_\infty,$$

onde $m := \sup_k |\mu_k|(X)$. Além disso, para quaisquer φ_i, φ_j,

$$|F(\varphi_i) - F(\varphi_j)| \leq m\|\varphi_i - \varphi_j\|_\infty.$$

Além disso,

$$|F(\varphi_i) - F(\varphi_j)| \leq m\|\varphi_i - \varphi_j\|_\infty.$$

Pelo lema anterior, F admite uma única extensão contínua a $\mathcal{C}_0(X)$, ainda denotada por F. Pelo teorema de representação de Riesz, existe $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ tal que

$$F(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(X).$$

Passo 3. (Convergência fraca-*). Seja $\varphi \in \mathcal{C}_0(X)$. Escolha uma sucessão $\psi_j \in \{\varphi_i\}$ tal que $\psi_j \to \varphi$ uniformemente. Então,

$$\left|\int_X (\varphi - \psi_j) \, d\nu_k\right| \leq m\|\varphi - \psi_j\|_\infty,$$

uniformemente em k. Além disso,

$$\int_X \psi_j \, d\nu_k \longrightarrow F(\psi_j), \qquad k \to \infty.$$

Logo,

$$\left|\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi \, d\nu_k - F(\psi_j)\right| \leq m\|\varphi - \psi_j\|_\infty.$$

Fazendo $j \to \infty$ e usando a continuidade de F,

$$F(\psi_j) \longrightarrow F(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu,$$

obtemos

$$\int_X \varphi \, d\nu_k \longrightarrow \int_X \varphi \, d\mu.$$

□

Nota 20.5. Uma versão análoga deste resultado permanece válida para medidas de Radon localmente finitas, substituindo $\mathcal{C}_0(X)$ por $\mathcal{C}_c(X)$ e supondo apenas uma limitação uniforme da variação total sobre cada compacto. A convergência obtida é então a convergência vaga.

20.2 Versão vaga de de la Vallée Poussin

A demonstração seguinte segue o mesmo esquema da versão fraca-* em $\mathcal{M}_b(X)$, sendo ligeiramente mais simples por apenas exigir um controlo uniforme da variação total sobre cada compacto.

Teorema 20.6 (de la Vallée Poussin – versão em $\mathcal{C}_c(X)$)**.** *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto e de segunda contagem. Seja $(\mu_k) \subset \mathcal{M}(X)$ uma sucessão de medidas de Radon tal que, para todo compacto $K \subset X$,*

$$\sup_k |\mu_k|(K) < \infty.$$

Então existe uma subsucessão (μ_{k_j}) e uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tais que

$$\int_X \varphi \, d\mu_{k_j} \longrightarrow \int_X \varphi \, d\mu, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c(X).$$

Demonstração. Seja (K_n) uma exaustão de X por compactos tal que $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$. Para cada n, seja

$$E_n := \{\varphi \in \mathcal{C}_c(X) : \operatorname{spt}(\varphi) \subset K_n\}.$$

Como K_n é compacto e metrizável, E_n, munido da norma do supremo, é separável. Escolhemos subespaços vetoriais enumeráveis densos

$$D_n \subset E_n, \qquad D_n \subset D_{n+1},$$

e definimos

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}.$$

Para cada i, seja $L_i = \operatorname{spt}(\varphi_i)$. Então

$$\left| \int_X \varphi_i \, d\mu_k \right| \le \|\varphi_i\|_\infty |\mu_k|(L_i).$$

Como $\sup_k |\mu_k|(L_i) < \infty$, a sucessão

$$\left(\int_X \varphi_i \, d\mu_k \right)_k$$

é limitada. Pelo argumento diagonal, existe uma subsucessão (μ_{k_j}) tal que, para todo i,

$$\int_X \varphi_i \, d\mu_{k_j}$$

converge. Definamos, para $\varphi \in D$,

$$F(\varphi) := \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi \, d\mu_{k_j}.$$

Como D é um espaço vetorial, F é linear. Para cada n, seja $C_n := \sup_k |\mu_k|(K_n) < \infty$. Se $\varphi \in D_n$, então

$$|F(\varphi)| \leq C_n \|\varphi\|_\infty.$$

Logo, $F|_{D_n}$ estende-se de modo único a um funcional linear contínuo $F_n : E_n \longrightarrow \mathbb{R}$. Pela unicidade da extensão, estas extensões são compatíveis: $F_{n+1}|_{E_n} = F_n$.. Como

$$\mathcal{C}_c(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

elas definem um funcional linear contínuo $F : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$. Pelo teorema de Riesz–Markov, existe uma medida de Radon μ tal que

$$F(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c(X).$$

Finalmente, seja $\varphi \in E_n$ e escolha $(\psi_m) \subset D_n$ tal que $\|\psi_m - \varphi\|_\infty \longrightarrow 0$. Temos

$$\left| \int_X \varphi \, d\mu_{k_j} - F(\varphi) \right| \leq 2C_n \|\varphi - \psi_m\|_\infty + \left| \int_X \psi_m \, d\mu_{k_j} - F(\psi_m) \right|.$$

Fazendo primeiro $j \to \infty$ e depois $m \to \infty$, obtemos

$$\int_X \varphi \, d\mu_{k_j} \longrightarrow F(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu.$$

□

Nota 20.7. Os dois teoremas anteriores são formalmente análogos, mas correspondem a duas dualidades distintas. A compacidade fraca-* em $\mathcal{M}_b(X)$ decorre da identificação

$$\mathcal{M}_b(X) \simeq C_0(X)'.$$

A versão vaga corresponde à identificação

$$\mathcal{M}(X) \simeq C_c(X)'.$$

A diferença entre ambas reside na hipótese de limitação: no primeiro caso, é necessário um controlo uniforme da variação total das medidas,

$$\sup_k |\mu_k|(X) < \infty,$$

enquanto, no segundo, basta exigir que, para todo compacto $K \subset X$,

$$\sup_k |\mu_k|(K) < \infty.$$

Nota histórica

A topologia fraca-* foi introduzida por Banach no contexto dos espaços duais normados e desempenhou um papel decisivo no desenvolvimento da Análise Funcional durante a primeira metade do século XX. A sua aplicação ao espaço das medidas de Radon decorre naturalmente do Teorema de Representação de Riesz e tornou-se uma ferramenta essencial em numerosas áreas da Matemática moderna.

Nota bibliográfica

A teoria da convergência fraca-* das medidas de Radon pode ser encontrada em *Measure Theory*, de V. I. Bogachev [8], *Intégration*, de N. Bourbaki [10], *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, de L. C. Evans e R. F. Gariepy [28], e *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, de L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara [2]. Para o enquadramento em Análise Funcional, podem consultar-se *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, de H. Brezis [12], e *A Course in Functional Analysis*, de J. B. Conway [19].

Capítulo 21

Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým

O teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým constitui um dos resultados centrais da Teoria da Medida. Descreve a estrutura de uma medida com sinal relativamente a uma medida positiva de referência, decompondo-a numa parte absolutamente contínua e numa parte singular. A demonstração desenvolve-se em duas etapas. Começamos por estabelecer a decomposição de Hahn, que permite separar o espaço em regiões onde a medida é não negativa e não positiva. Esta decomposição conduz naturalmente à decomposição de Jordan de uma medida com sinal. Em seguida demonstramos o teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým, que afirma que toda medida com sinal finita pode ser escrita de forma única como a soma de uma medida absolutamente contínua relativamente à medida de referência e de uma medida singular. A parte absolutamente contínua admite uma densidade integrável, denominada derivada de Radon–Nikodým.

21.1 Definições preliminares

Definição 21.1 (Medidas absolutamente contínuas)**.** Sejam ν uma medida com sinal e μ uma medida sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que ν é *absolutamente contínua* relativamente a μ, e escrevemos

$$\nu \ll \mu,$$

se

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0, \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Definição 21.2 (Medidas singulares)**.** Sejam μ e ν medidas sobre $(X, \mathcal{A})$. Dizemos que μ e ν são *singulares*, e escrevemos

$$\mu \perp \nu,$$

se existem conjuntos mensuráveis $M, N \in \mathcal{A}$ tais que

$$M \cap N = \varnothing, \qquad M \cup N = X,$$

e

$$\mu(M) = 0, \qquad \nu(N) = 0.$$

Exemplo 21.3. A medida de Dirac δ_x e a medida de Cantor μ_C são singulares relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Exemplo 21.4. Se μ é a medida de Lebesgue e ν a medida de contagem em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, então

$$\mu \ll \nu, \qquad \nu \not\ll \mu.$$

Exemplo 21.5. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{A},$$

então $\nu \ll \mu$.

As noções de continuidade absoluta e de singularidade descrevem a relação entre duas medidas. Para demonstrar o Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým, é contudo necessário estudar primeiro a estrutura própria de uma medida com sinal. A decomposição de Hahn fornece precisamente esse instrumento, separando o espaço numa parte positiva e numa parte negativa.

21.2 Decomposição de Hahn

Definição 21.6 (Conjuntos positivos, negativos e nulos)**.** Seja ν uma medida real (finita e com sinal) num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$.
Um conjunto mensurável $A \subset X$ diz-se

- *positivo* para ν se
$$\nu(B) \geq 0, \qquad \forall\, B \subset A \text{ mensurável};$$
- *negativo* para ν se
$$\nu(B) \leq 0, \qquad \forall\, B \subset A \text{ mensurável};$$
- *nulo* para ν se
$$\nu(B) = 0, \qquad \forall\, B \subset A \text{ mensurável}.$$

Exercício 111 (F)

Demonstrar que, se A é negativo para μ, então

$$B \subset C \subset A \quad \Longrightarrow \quad \mu(C) \leq \mu(B).$$

Nota 21.7. Para medidas com sinal, o valor de $\nu(A)$, por si só, não determina a natureza do conjunto A. Com efeito, devido à compensação entre as partes positiva e negativa da medida, podem ocorrer as situações

$$\nu(A) > 0 \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ positivo},$$

e

$$\nu(A) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ nulo}.$$

A decomposição de Hahn mostra que, apesar deste fenómeno, é sempre possível decompor o espaço em duas regiões disjuntas, uma positiva e outra negativa.

Lema 21.8 (Lema técnico 1)**.** *Seja ν uma medida real em $(X, \mathcal{A})$. Se $A \in \mathcal{A}$ satisfaz $\nu(A) > 0$, então existe um subconjunto mensurável $P \subset A$, positivo para ν, tal que $\nu(P) > 0$.*

Demonstração. Se A for positivo, basta tomar $P = A$. Caso contrário, existe um subconjunto mensurável $A_1 \subset A$ tal que $\nu(A_1) < 0$. Então

$$\nu(A \setminus A_1) = \nu(A) - \nu(A_1) > \nu(A).$$

Se $A \setminus A_1$ ainda não for positivo, repetimos o procedimento. Escolhendo em cada etapa um subconjunto de medida inferior a $-\varepsilon_n$, onde (ε_n) é uma sucessão positiva tal que $\sum_n \varepsilon_n < \nu(A)$, o processo não pode continuar indefinidamente. Com efeito, a soma das medidas negativas retiradas seria estritamente inferior a $-\nu(A)$, o que contradiz a positividade da medida do conjunto restante. Assim, após um número finito de etapas obtemos um subconjunto positivo $P \subset A$, e pela construção tem-se $\nu(P) > 0$. □

Teorema 21.9 (Decomposição de Hahn)**.** *Seja ν uma medida real em $(X, \mathcal{A})$. Então existem conjuntos mensuráveis P e N, respectivamente positivo e negativo para ν, tais que*

$$P \cup N = X, \qquad P \cap N = \varnothing.$$

Além disso, P e N são únicos a menos de conjuntos ν-nulos.

Demonstração. Seja $m = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{A},\ A \text{ positivo}\}$. Escolha uma sucessão de conjuntos positivos (A_n) tal que $\nu(A_n) \to m$ e defina

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como a união enumerável de conjuntos positivos é positiva, tem-se $\nu(P) \geq m$. Seja $N = X \setminus P$. Mostremos que N é negativo. Caso contrário, existiria um conjunto $A \subset N$ com $\nu(A) > 0$. Pelo Lema 21.8, existe um conjunto positivo $P_0 \subset A$ tal que $\nu(P_0) > 0$. Como $P \cap P_0 = \varnothing$, o conjunto $P \cup P_0$ é positivo e

$$\nu(P \cup P_0) = \nu(P) + \nu(P_0) > m,$$

o que contradiz a definição de m. Para a unicidade, seja $X = Q \sqcup M$ outra decomposição de Hahn. Então $P \setminus Q \subset P \cap M$, pelo que $P \setminus Q$ é simultaneamente positivo e negativo; logo, $\nu(P \setminus Q) = 0$. Do mesmo modo, $\nu(Q \setminus P) = 0$. Portanto, P e Q diferem apenas por um conjunto ν-nulo, e o mesmo vale para N e M. □

A decomposição de Hahn permite distinguir as regiões onde uma medida com sinal possui comportamento positivo ou negativo. O lema seguinte utiliza esta decomposição para comparar duas medidas positivas e identificar uma região onde uma delas domina um múltiplo da outra.

Lema 21.10 (Lema técnico 2)**.** *Sejam μ e ν medidas positivas finitas em $(X, \mathcal{A})$. Então ou $\mu \perp \nu$, ou existe $\varepsilon > 0$ e um conjunto mensurável P com $\mu(P) > 0$ que é positivo para a medida $\nu - \varepsilon\mu$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, seja $X = P_n \sqcup N_n$ uma decomposição de Hahn para a medida $\nu - \frac{1}{n}\mu$. Defina

$$P = \bigcup_{n \geq 1} P_n, \qquad N = \bigcap_{n \geq 1} N_n.$$

Então $X = P \sqcup N$. Além disso, como $N \subset N_n$, tem-se

$$\nu(N) - \frac{1}{n}\mu(N) \leq 0, \qquad \forall n \geq 1,$$

de onde $0 \leq \nu(N) \leq \mu(N)/n$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\nu(N) = 0$. Se $\mu(P) = 0$, então $\mu(X \setminus N) = 0$ e, como $\nu(N) = 0$, conclui-se que $\mu \perp \nu$. Caso contrário, existe n tal que $\mu(P_n) > 0$, pois $P = \bigcup_n P_n$. Assim, P_n é positivo para $\nu - \frac{1}{n}\mu$, e basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{n}$. □

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado principal do capítulo. A ideia consiste em extrair de ν a maior medida que admite uma densidade relativamente a μ; o lema anterior permitirá mostrar que o resto é necessariamente singular.

21.3 Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým

Otton Nikodým
(1887–1974)

Teorema 21.11 (Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým)**.** *Sejam ν uma medida real finita e μ uma medida positiva finita sobre $(X, \mathcal{A})$. Então existem medidas reais ν_a e ν_s tais que*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \qquad \nu_a \ll \mu, \qquad \nu_s \perp \mu.$$

Além disso, existe uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$, única a menos de igualdade μ-q.t.p., tal que

$$\nu_a(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

A função f chama-se derivada de Radon–Nikodým *de ν_a relativamente a μ e escreve-se*

$$f = \frac{d\nu_a}{d\mu}.$$

Demonstração. É suficiente considerar o caso em que ν é positiva, pois qualquer medida real se escreve como diferença das suas partes positiva e negativa. Considere

$$\mathcal{F} = \left\{ g \geq 0 \text{ mensurável} : \int_A g \, d\mu \leq \nu(A), \ \forall A \in \mathcal{A} \right\}.$$

A família $\mathcal{F}$ é estável por máximo. Com efeito, se $g, h \in \mathcal{F}$ e

$$B = A \cap \{g > h\}, \qquad C = A \cap \{g \leq h\},$$

então

$$\int_A \max\{g, h\} \, d\mu = \int_B g \, d\mu + \int_C h \, d\mu \leq \nu(B) + \nu(C) = \nu(A).$$

Defina

$$m = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu : \ g \in \mathcal{F} \right\} \leq \nu(X),$$

e seja $(g_n) \subset \mathcal{F}$ uma sucessão tal que $\int_X g_n \, d\mu \to m$. Sem perda de generalidade, substituindo g_n por $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$, podemos supor que (g_n) é crescente. Pelo teorema da convergência monótona, existe $f = \sup_n g_n \in \mathcal{F}$ e

$$\int_X f \, d\mu = m.$$

Defina

$$\nu_a(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad \nu_s = \nu - \nu_a.$$

Como $f \in \mathcal{F}$, a medida ν_s é positiva. Suponha agora que $\nu_s \not\perp \mu$. Pelo Lema 2, existe $\varepsilon > 0$ e um conjunto P com $\mu(P) > 0$ que é positivo para $\nu_s - \varepsilon\mu$. Em particular,

$$\nu_s(A) \geq \varepsilon\mu(A), \qquad \forall \, A \subset P.$$

Daí segue que

$$\nu(A) \geq \int_A (f + \varepsilon\chi_P) \, d\mu, \qquad \forall A \in \mathcal{A},$$

isto é, $f + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{F}$. Mas então

$$\int_X (f + \varepsilon\chi_P) \, d\mu = m + \varepsilon\mu(P) > m,$$

o que contradiz a definição de m. Logo, $\nu_s \perp \mu$. A unicidade decorre do facto de uma medida simultaneamente singular e absolutamente contínua relativamente a μ ser necessariamente nula. A unicidade da derivada de Radon–Nikodým é imediata. □

Nota 21.12. O teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým fornece uma decomposição canónica de uma medida relativamente a uma medida de referência. A medida ν_a descreve a parte distribuída segundo μ, enquanto ν_s está concentrada num conjunto de μ-medida nula. A função

$$\frac{d\nu_a}{d\mu}$$

mede a densidade de ν relativamente a μ e desempenha um papel fundamental na Teoria da Medida, na Probabilidade e na Análise Funcional.

Nota histórica

A decomposição de medidas e a noção de continuidade absoluta constituem alguns dos desenvolvimentos mais importantes da Teoria da Medida no início do século XX. A decomposição de Hahn [35] foi obtida por Hans Hahn em 1907 e fornece uma partição canónica do espaço em conjuntos positivo e negativo para uma medida com sinal. Poucos anos depois, Camille Jordan mostrou que qualquer medida com sinal pode ser escrita como diferença de duas medidas positivas mutuamente singulares, resultado hoje conhecido por decomposição de Jordan. Em 1913, Johann Radon [63] demonstrou que uma medida absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue admite uma densidade integrável. Em 1930, Otton Nikodým [61] estendeu este resultado ao contexto geral das medidas σ-finitas, obtendo o Teorema de Radon–Nikodým na forma atualmente utilizada.

Com o Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým culmina a construção da moderna Teoria da Medida iniciada por Lebesgue. Em conjunto com os teoremas de representação de Riesz e as decomposições de Hahn e de Jordan, este resultado fornece o quadro estrutural sobre o qual assentam grande parte da Análise Funcional, da Probabilidade, da Estatística e das Equações às Derivadas Parciais.

Os resultados apresentados neste capítulo constituem hoje um dos pilares da moderna Teoria da Medida. Para diferentes abordagens e desenvolvimentos destes temas, remetemos para a bibliografia seguinte.

Nota bibliográfica

A decomposição de Hahn, a decomposição de Jordan e o Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým são apresentados em praticamente todos os tratados de Teoria da Medida. Entre as referências clássicas, destacam-se *Measure Theory*, de P. R. Halmos [36], *Real and Complex Analysis*, de W. Rudin [68], *Real Analysis*, de H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick [65], *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, de G. B. Folland [31], e *Measure Theory*, de D. L. Cohn [18]. Uma abordagem moderna, com numerosas aplicações à Probabilidade e à Análise Funcional, pode ser encontrada em *Measure Theory*, Vols. I–II, de V. I. Bogachev [8], que constitui uma das referências mais completas sobre a Teoria da Medida. As aplicações probabilísticas do Teorema de Radon–Nikodým, nomeadamente às mudanças de medida, às martingalas e aos pro-

cessos estocásticos, são desenvolvidas em *Probability and Measure*, de P. Billingsley [6], e em *Probability: Theory and Examples*, de R. Durrett [26].

Capítulo 22

Aplicações e teoremas afins

Os teoremas de convergência demonstrados nos capítulos anteriores constituem os principais instrumentos para o estudo da integração de Lebesgue. Neste capítulo apresentamos algumas das suas aplicações mais importantes, bem como resultados clássicos que lhes estão intimamente relacionados. Começamos pelo Teorema de Egorov, que mostra que, em conjuntos de medida finita, a convergência quase em toda a parte implica convergência uniforme fora de um conjunto de medida arbitrariamente pequena. Em seguida introduzimos a noção de integrabilidade uniforme e demonstramos o Teorema de Vitali, que generaliza o teorema da convergência dominada. Terminamos o capítulo com algumas desigualdades fundamentais da Teoria da Probabilidade e da Análise, nomeadamente as desigualdades de Markov e de Chebyshev, e com o Teorema de Fubini, que permite calcular integrais múltiplos por integração iterada.

22.1 Exemplos de medidas e espaços nas aplicações

Os resultados desenvolvidos ao longo deste capítulo encontram numerosas aplicações em Estatística, Probabilidade e Análise Estocástica. Nesta última secção apresentamos alguns dos espaços mais frequentemente utilizados nestas áreas e recordamos uma propriedade topológica fundamental da teoria moderna das medidas.

Definição 22.1 (Espaço polaco)**.** Um espaço topológico X diz-se *polaco* se existe uma métrica d que gera a topologia de X e tal que

1. (X, d) é completo;
2. X é separável, isto é, possui um subconjunto enumerável denso.

Os espaços polacos constituem o enquadramento natural de grande parte da Probabilidade moderna. Muitos dos espaços funcionais utilizados em Estatística, Teoria das Probabilidades e Análise Estocástica possuem esta estrutura. Apresentamos de seguida alguns exemplos importantes.

Espaço	**Medida típica**	**Aplicações**
$\mathbb{R}^n$	Lebesgue	Análise, Estatística, PDE
$\mathbb{N}$	Contagem	Variáveis aleatórias discretas
Espaços finitos	Probabilidade discreta	Cadeias de Markov
$C([0,T])$	Wiener	Movimento Browniano
$D([0,T])$	Skorokhod	Processos com saltos
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	Produto	Ensaios de Bernoulli
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	Fraca-*	Transporte ótimo

Os exemplos anteriores mostram que os espaços de medida considerados ao longo deste curso abrangem tanto situações clássicas da Análise como contextos probabilísticos. Estudaremos agora alguns resultados fundamentais sobre convergência de funções mensuráveis, que desempenham um papel central na teoria da integração e nas suas aplicações.

22.2 Teorema de Egorov

Teorema 22.2 (Teorema de Egorov)**.** *Seja $(E, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(E) < \infty$, e seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis tal que $f_n \to f$ μ-q.t.p. em E. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável $A \subset E$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em $E \setminus A$.*

Demonstração. Para $k, n \geq 1$, defina

$$A_{1/k,n} := \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in E : \ |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Para cada k, a sucessão $(A_{1/k,n})_n$ é decrescente. Além disso, como $f_n \to f$ μ-q.t.p., tem-se

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/k,n} \right) = 0.$$

Pela continuidade da medida para sucessões decrescentes, $\mu(A_{1/k,n}) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim, para cada $k \geq 1$, existe N_k tal que

$$\mu(A_{1/k,N_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Defina

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k,N_k}.$$

Então $\mu(A) < \varepsilon$.

Mostremos que $f_n \to f$ uniformemente em $E \setminus A$. Dado $\eta > 0$, escolha k tal que $1/k < \eta$. Se $x \in E \setminus A$ e $n \geq N_k$, então $x \notin A_{1/k,N_k}$ e, portanto,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \eta.$$

Logo,

$$\sup_{x\in E\setminus A} |f_n(x) - f(x)| < \eta, \qquad n \geq N_k,$$

o que demonstra a convergência uniforme em $E \setminus A$. □

O Teorema de Egorov transforma uma convergência quase em toda a parte numa convergência uniforme fora de um conjunto de pequena medida. Para obter a convergência das integrais, contudo, é necessária uma hipótese adicional que controle a massa das funções. Esta é precisamente a noção de integrabilidade uniforme.

22.3 Integrabilidade uniforme e teorema de Vitali

O Teorema de Egorov mostra que, num espaço de medida finita, a convergência quase em toda a parte pode ser transformada em convergência uniforme fora de um conjunto de medida arbitrariamente pequena. Contudo, esta propriedade não é suficiente para garantir a convergência das integrais. Para controlar o comportamento das funções sobre conjuntos de pequena medida, introduzimos a noção de *integrabilidade uniforme*. O Teorema de Vitali mostra que esta condição, combinada com a convergência quase em toda a parte, é suficiente para obter a convergência em L^1.

22.3.1 Propriedades das funções integráveis

Antes de prosseguir com algumas aplicações da convergência em L^1, reunimos duas propriedades fundamentais das funções integráveis. A primeira mostra que uma função integrável é necessariamente finita quase em toda a parte. A segunda exprime a continuidade absoluta da integral de Lebesgue relativamente à medida, propriedade que será utilizada repetidamente na sucessão.

Lema 22.3. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável, isto é,*

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Então f é finita μ-q.t.p. em X.

Demonstração. Substituindo f por $|f|$, podemos supor que $f \geq 0$. Defina

$$E = \{x \in X : \ f(x) = +\infty\}.$$

Se $\mu(E) > 0$, então, para todo $t > 0$, tem-se $f \geq t\chi_E$. Logo,

$$\int_X f\, d\mu \geq t\, \mu(E).$$

Fazendo $t \to \infty$, obtemos

$$\int_X f\, d\mu = +\infty,$$

contradição. Portanto, $\mu(E) = 0$. □

Lema 22.4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável, isto é,*

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon,$$

sempre que $A \in \mathcal{A}$ satisfaz $\mu(A) < \delta$.

Demonstração. Substituindo f por $|f|$, podemos supor que $f \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n = \min\{f, n\}$. Então $f_n \uparrow f$ pontualmente e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_X f_n\, d\mu \longrightarrow \int_X f\, d\mu.$$

Escolha n tal que

$$\int_X (f - f_n)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

e tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Se $\mu(A) < \delta$, então

$$\int_A f_n\, d\mu \leq n\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequentemente,

$$\int_A f\, d\mu = \int_A (f - f_n)\, d\mu + \int_A f_n\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

22.3.2 Teorema de Vitali

Definição 22.5 (Integrabilidade uniforme)**.** Uma sucessão $(f_n) \subset L^1(X, \mu)$ diz-se *uniformemente integrável* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f_n|\, d\mu < \varepsilon, \qquad \forall n,$$

sempre que $E \in \mathcal{A}$ satisfaz $\mu(E) < \delta$.

Nota 22.6. Quando não se verificam as hipóteses dos teoremas de convergência de Levi ou da convergência dominada de Lebesgue, a integrabilidade uniforme permite ainda obter convergência em L^1. O resultado fundamental neste contexto é o Teorema de Vitali.

Teorema 22.7 (Teorema da convergência de Vitali)**.** *Suponhamos que $\mu(X) < \infty$ e seja $(f_n) \subset L^1(X, \mu)$ tal que*

Giuseppe Vitali
(1875–1932)

1. $f_n \to f$ *μ-q.t.p.;*
2. f_n *e* f *são finitas μ-q.t.p.;*
3. (f_n) *é uniformemente integrável.*

Então

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{em } L^1(X,\mu).$$

Demonstração. Pela integrabilidade uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f_n|\,d\mu < \varepsilon, \qquad \forall n,$$

sempre que $\mu(E) < \delta$. Pelo Teorema de Egorov, existe um conjunto mensurável E_1 com $\mu(E_1) < \delta$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em $X \setminus E_1$. Assim,

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu = \int_{X\setminus E_1} |f_n - f|\,d\mu + \int_{E_1} |f_n - f|\,d\mu.$$

Temos

$$\int_{X\setminus E_1} |f_n - f|\,d\mu \le \mu(X)\,\|f_n - f\|_{L^\infty(X\setminus E_1)},$$

e o lado direito converge para zero. Além disso,

$$\int_{E_1} |f_n|\,d\mu < \varepsilon, \qquad \int_{E_1} |f|\,d\mu < \varepsilon,$$

pelo que

$$\int_{E_1} |f_n - f|\,d\mu \le 2\varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu \le 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, conclui-se que

$$\|f_n - f\|_{L^1(X,\mu)} \longrightarrow 0.$$

□

Depois dos resultados abstratos de convergência, apresentamos agora duas desigualdades elementares mas extremamente úteis para estimar a medida dos conjuntos onde uma função assume valores elevados. Estas estimativas encontram inúmeras aplicações em Probabilidade e Estatística.

22.4 Desigualdades de Markov e de Chebyshev

Teorema 22.8 (Desigualdade de Markov)**.** *Seja $f \in L^1(X,\mu)$, com $f \geq 0$. Então, para todo $\lambda > 0$,*

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_X f\,d\mu.$$

Demonstração. Como $f \geq \lambda\,\chi_{\{f\geq\lambda\}}$, basta integrar ambos os membros para obter

$$\int_X f\,d\mu \geq \lambda\,\mu(\{f \geq \lambda\}),$$

o que é precisamente a desigualdade pretendida. □

Corolário 22.9 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Seja $f \in L^2(X,\mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$,*

$$\mu\big(\{|f| \geq \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda^2}\int_X |f|^2\,d\mu.$$

Demonstração. Aplique a desigualdade de Markov à função não negativa $|f|^2$. □

Exercício 112 (F)

Demonstrar a desigualdade de Chebyshev deduzindo-a da desigualdade de Markov.

Exercício 113 (M)

Defina os conceitos de variável aleatória, esperança e variância, e demonstre a desigualdade de Chebyshev para variáveis aleatórias. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que

$$\mathbb{E}[X] = m, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 > 0.$$

Mostre que, para todo $k > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - m| \geq k\sigma\big) \leq \frac{1}{k^2}.$$

22.4.1 Aplicações em Estatística e Probabilidade

As desigualdades de Markov e de Chebyshev ocupam um lugar central em Estatística e Probabilidade. A sua principal vantagem é fornecer estimativas para probabilidades de

eventos raros utilizando apenas a esperança ou a variância de uma variável aleatória, sem qualquer hipótese sobre a distribuição de probabilidade. Embora estas estimativas sejam, em geral, pouco precisas, são universais e constituem a base de numerosos resultados, entre os quais a Lei Fraca dos Grandes Números, critérios de concentração e métodos de estimação.

Exemplo 22.10 (Desigualdade de Markov)**.** Seja X uma variável aleatória não negativa com esperança finita $\mathbb{E}[X]$. Então, para todo $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Por exemplo, se $\mathbb{E}[X] = 10$, então

$$\mathbb{P}(X \geq 50) \leq \frac{10}{50} = 0.2.$$

Mesmo sem conhecer a distribuição de X, sabemos que a probabilidade de observar um valor superior a 50 não pode exceder 20%.

Exemplo 22.11 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Seja X uma variável aleatória com esperança $m = \mathbb{E}[X]$ e variância $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Então, para todo $k > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Esta desigualdade mostra que a maior parte das observações se concentra em torno da média, independentemente da distribuição da variável aleatória.

Exemplo 22.12. Suponhamos que uma população tem média $m = 50$ e desvio-padrão $\sigma = 5$. Aplicando a desigualdade de Chebyshev com $k = 2$, obtemos

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{1}{4}.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}(40 \leq X \leq 60) \geq \frac{3}{4}.$$

Assim, pelo menos 75% das observações pertencem ao intervalo $[40, 60]$, qualquer que seja a distribuição da população.

Nota 22.13. As desigualdades de Markov e de Chebyshev são frequentemente utilizadas quando a distribuição da variável aleatória é desconhecida ou demasiado complicada para permitir um cálculo exato das probabilidades. Em Estatística, constituem ferramentas fundamentais para obter estimativas conservadoras e para estudar a concentração de variáveis aleatórias em torno da sua média.

Até agora considerámos integrais definidas sobre um único espaço de medida. Quando intervêm várias variáveis, torna-se necessário relacionar a integral sobre o produto de espaços com integrais iteradas. O Teorema de Fubini fornece precisamente este resultado

fundamental.

22.5 Teorema de Fubini

Teorema 22.14 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida e seja*

$$u \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Então:

1. *Para μ_2-q.t.p. $x_2 \in \Omega_2$, tem-se*

$$u(\cdot, x_2) \in L^1(\Omega_1, \mu_1).$$

2. *A função*

$$x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

pertence a $L^1(\Omega_2, \mu_2)$.

3. *Vale a fórmula de Fubini:*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} u\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

Demonstração. Por hipótese, existem $f, g \in L^+(\Omega, \mu)$ tais que

$$u = f - g \qquad \mu\text{-q.t.p.}$$

Aplicando o resultado anterior a f e g, conclui-se que, para μ_2-q.t.p. x_2,

$$f(\cdot, x_2),\ g(\cdot, x_2) \in L^+(\Omega_1, \mu_1),$$

pelo que

$$u(\cdot, x_2) = f(\cdot, x_2) - g(\cdot, x_2) \in L^1(\Omega_1, \mu_1),$$

obtendo-se (i). Além disso,

$$\int_{\Omega_1} u(x_1, x_2)\, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 - \int_{\Omega_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1,$$

e cada um dos termos do lado direito pertence a $L^1(\Omega_2, \mu_2)$, provando (ii). Finalmente, aplicando a fórmula de Fubini em L^+ a f e g, obtém-se

$$\int_{\Omega} f\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f\, d\mu_1 \right) d\mu_2,$$

e

$$\int_{\Omega} g\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} g\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Subtraindo as duas igualdades conclui-se a demonstração de (iii). □

Exercício 114 (M)

Seja $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ mensurável relativamente à medida produto $\mu_1 \otimes \mu_2$.
Suponha que, para μ_2-quase todo $x_2 \in \Omega_2$, a secção

$$S_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 : \ (x_1, x_2) \in S\}$$

é μ_1-desprezável. Mostre que S é $\mu_1 \otimes \mu_2$-desprezável.
Sugestão: aplicar o teorema de Tonelli à função característica χ_S.

Como ilustração do poder do Teorema de Fubini, apresentamos uma aplicação que o combina com o Teorema de Radon–Nikodým para obter uma representação útil de certas medidas definidas em espaços produto.

22.5.1 Uma aplicação do teorema de Radon–Nikodým

Terminamos este capítulo com uma aplicação do Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým. Mostramos que uma medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$, cuja massa varia continuamente por translação, é necessariamente absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue. O resultado seguinte permite então representá-la por uma densidade pertencente a $L^1(\mathbb{R})$.

Lema 22.15. *Seja μ uma medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ e seja λ a medida de Lebesgue. Suponha que, para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, a aplicação $x \longmapsto \mu(A + x)$ seja contínua. Então $\mu \ll \lambda$.*

Nota 22.16. Como é habitual, escrevemos $d\lambda(x)$, ou simplesmente dx, quando integramos relativamente à medida de Lebesgue.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mu \not\ll \lambda$. Então existe um conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mu(B) > 0, \qquad \lambda(B) = 0.$$

Pela invariância por translação da medida de Lebesgue,

$$\lambda(B + t) = 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o Teorema de Fubini e observando que

$$x \in B + s \iff s \in x - B,$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \mu(B + s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B+s}(x)\, d\mu(x) \right) ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{x-B}(s)\, ds \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(x - B)\, d\mu(x) = 0.$$

Logo,

$$\mu(B + s) = 0 \quad \text{q.t.p.}$$

Existe, portanto, uma sucessão (s_n) tal que $s_n \to 0$ e

$$\mu(B + s_n) = 0, \qquad \forall n.$$

Como a aplicação $s \mapsto \mu(B + s)$ é contínua, $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B + s_n) = 0$, contradição. Portanto, $\mu \ll \lambda$. □

O lema anterior mostra que a continuidade por translação implica a continuidade absoluta relativamente à medida de Lebesgue. O Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým fornece então imediatamente uma representação integral da medida.

Teorema 22.17 (Teorema da média pelas medidas)**.** *Seja μ uma medida de Borel positiva e finita sobre $\mathbb{R}$ tal que, para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, a função $x \longmapsto \mu(A+x)$ é contínua. Então existe uma função $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que*

$$\mu(A) = \int_A f(x)\,dx, \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Pelo lema anterior, $\mu \ll \lambda$. O resultado segue imediatamente do Teorema de Lebesgue–Radon–Nikodým. □

Exercício 115 (F)

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to [0, +\infty]$ mensurável.
Mostrar que, para todo $\alpha > 0$,

$$\mu\big(\{x \in X :\ f(x) \geq \alpha\}\big) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f\,d\mu.$$

1. Demonstrar a desigualdade.
2. Considerar $f(x) = x$ em $[0, 1]$, munido da medida de Lebesgue, e verificar o resultado para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nota histórica

Os capítulos anteriores desenvolveram os principais fundamentos da moderna Teoria da Medida. Neste capítulo reunimos alguns dos resultados que tornam essa teoria operacional, nomeadamente os teoremas de convergência, o Teorema de Fubini e várias aplicações à Probabilidade e à Estatística. O Teorema de Egorov foi demonstrado por Dmitri Egorov em 1911, no artigo *Sur les suites de fonctions mesurables* [27] e estabelece uma ligação entre convergência quase em toda a parte e convergência uniforme fora de conjuntos de pequena medida. A noção de integrabilidade uniforme foi introduzida por Vitali no contexto do estudo da convergência em L^1. O Teorema de Vitali fornece um critério de convergência que desempenha um papel central em Análise Funcional, Probabilidade e Estatística. As desigualdades de Markov e de Chebyshev devem os seus nomes a A. A. Markov e P. L. Chebyshev. A desigualdade atualmente designada por desigualdade de Chebyshev foi demonstrada por Chebyshev em 1867 no artigo *Des valeurs moyennes* [15]. A desigualdade de Markov recebeu o nome de A. A. Markov, que a apresentou no seu tratado *Cálculo das probabilidades*, publicado em 1900 [53]. Contudo, a desigualdade já se encontrava, sob uma forma equivalente, nos trabalhos anteriores de Chebyshev [15]. As desigualdades de Markov e de Chebyshev constituem alguns dos primeiros resultados quantitativos da Teoria das Probabilidades e permanecem ferramentas fundamentais na obtenção de estimativas independentes da distribuição das variáveis aleatórias. Finalmente, o Teorema de Fubini foi demonstrado por Guido Fubini em 1907, no artigo *Sugli integrali multipli* [34], generaliza o Teorema de Tonelli [73] às funções integráveis e tornou-se uma

das ferramentas mais importantes da Análise Moderna.

Nota bibliográfica

Os teoremas apresentados neste capítulo encontram-se em praticamente todos os textos clássicos de Teoria da Medida. As demonstrações do Teorema de Egorov, do Teorema de Vitali, das desigualdades de Markov e de Chebyshev e do Teorema de Fubini podem ser consultadas, por exemplo, em Royden e Fitzpatrick (*Real Analysis*[31]), Folland (*Real Analysis*[31]), Rudin (*Real and Complex Analysis*[68]) e Cohn (*Measure Theory*). As aplicações à Probabilidade e à Estatística são desenvolvidas em detalhe em Billingsley (*Probability and Measure*) e em Durrett (*Probability: Theory and Examples*), onde estes resultados constituem a base para o estudo das leis dos grandes números, dos teoremas centrais do limite e da convergência de variáveis aleatórias.

Capítulo 23

Teorema de Hausdorff–Lebesgue

Ao longo deste livro surgiram progressivamente dois temas fundamentais da Análise Moderna. O primeiro é a *completude*. Desde os espaços métricos completos até aos espaços de Banach, vimos que muitos espaços de funções permanecem estáveis quando se passa ao limite. Esta propriedade desempenha um papel essencial em Análise, pois permite construir novos objetos como limites de sequências de funções mais simples. O segundo é a *dualidade*. Os teoremas de representação de Riesz mostraram que os funcionais lineares contínuos sobre os espaços $\mathcal{C}_c(X)$ e $\mathcal{C}_0(X)$ podem ser identificados com medidas de Radon. Assim, estes espaços de funções contínuas aparecem naturalmente na Teoria da Medida, na Análise Funcional, na Probabilidade e nas Equações às Derivadas Parciais, constituindo um elo entre a Topologia e a Integração.

O objetivo deste capítulo é mostrar que as funções contínuas desempenham um papel ainda mais profundo. Demonstraremos que toda a classe das funções borelianas pode ser reconstruída a partir das funções contínuas recorrendo apenas à operação de passagem ao limite. Mais precisamente, provaremos o Teorema de Hausdorff–Lebesgue, segundo o qual a classe das funções borelianas é a menor classe de funções de X em $\mathbb{R}$ que contém todas as funções contínuas e é fechada por limites pontuais. Este resultado evidencia uma ligação profunda entre Topologia e Teoria da Medida: a estrutura mensurável de um espaço não constitui um objeto independente, mas pode ser inteiramente gerada a partir das funções contínuas por um procedimento puramente analítico.

23.1 Hierarquia de Borel

Os conjuntos borelianos foram introduzidos na Secção 13.3 como a menor σ-álgebra que contém os abertos de um espaço topológico. A sua construção baseia-se em operações enumeráveis de união, interseção e complementação. Uma questão natural consiste em medir a complexidade destes conjuntos. Com efeito, nem todos são obtidos do mesmo modo: alguns resultam diretamente dos conjuntos abertos ou fechados, enquanto outros exigem sucessivas iterações de uniões e interseções enumeráveis. Esta observação conduz à *hierarquia de Borel*, que organiza os conjuntos borelianos em classes de complexidade crescente. Para além do seu interesse em Topologia Descritiva, esta classificação será o principal instrumento utilizado na demonstração do Teorema de Hausdorff–Lebesgue.

Para definir rigorosamente esta hierarquia, introduzimos primeiro algumas notações

relativas às operações enumeráveis sobre famílias de conjuntos. Seja $\mathcal{E}$ uma família de subconjuntos de um conjunto X. Definimos

$$\mathcal{E}_\sigma = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{E} \right\},$$

e

$$\mathcal{E}_\delta = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{E} \right\}.$$

> *Nota* 23.1. As letras gregas σ e δ provêm das palavras alemãs *Summe* (união) e *Durchschnitt* (interseção), terminologia tradicionalmente utilizada na literatura clássica de Topologia e Teoria da Medida.

A construção da hierarquia de Borel recorre a uma indução transfinita ao longo dos ordinais contáveis. Denotamos por ω_1 o primeiro ordinal não enumerável, isto é, o menor ordinal que não é equipotente a $\mathbb{N}$.

Estamos agora em condições de definir recursivamente as diferentes classes da hierarquia de Borel. Seja X um espaço topológico metrizável. Denotemos por $\mathcal{G}$ a família dos conjuntos abertos de X e por $\mathcal{F}$ a família dos conjuntos fechados.

Construiremos, por indução transfinita sobre os ordinais contáveis $\alpha < \omega_1$, duas famílias de subconjuntos de X, designadas por *classes aditivas* e *classes multiplicativas*.

Começamos por definir

$$\Sigma_1^0 = \mathcal{G}, \qquad \Pi_1^0 = \mathcal{F}.$$

Suponhamos agora definidas as classes Σ_β^0 e Π_β^0 para todo ordinal $\beta < \alpha$. Definimos então

$$\Sigma_\alpha^0 = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta^0 \right)_\sigma,$$

e

$$\Pi_\alpha^0 = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta^0 \right)_\delta.$$

Finalmente, definimos

$$\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0.$$

Os primeiros níveis desta construção correspondem a classes clássicas da Topologia Geral e da Teoria da Medida. Por exemplo,

- Δ_1^0 é a classe dos conjuntos simultaneamente abertos e fechados (*clopen*);
- $\Sigma_2^0 = F_\sigma$, a classe das uniões numeráveis de conjuntos fechados;
- $\Pi_2^0 = G_\delta$, a classe das interseções numeráveis de conjuntos abertos;
- $\Sigma_3^0 = G_{\delta\sigma}$, a classe das uniões numeráveis de conjuntos G_δ;
- $\Pi_3^0 = F_{\sigma\delta}$, a classe das interseções numeráveis de conjuntos F_σ.

Além disso, estas classes formam uma família crescente relativamente à inclusão. Mais precisamente,

$$\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_\alpha^0 \subset \Sigma_\beta^0,$$

e

$$\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad \Pi^0_\alpha \subset \Pi^0_\beta.$$

Para $\alpha = n$ finito,

$$\Sigma^0_n = (\Pi^0_{n-1})_\sigma,$$

pois a construção já estabilizou no padrão indutivo finito.

Os conjuntos Σ^0_α, Π^0_α e Δ^0_α são denominados, respetivamente, *classes aditivas*, *classes multiplicativas* e *classes ambíguas*.

A família ordenada por inclusão formada por todas estas classes constitui a *hierarquia de Borel*. O resultado seguinte mostra que esta hierarquia descreve completamente a σ-álgebra de Borel. A família ordenada por inclusão formada pelas classes Σ^0_α, Π^0_α e Δ^0_α constitui a *hierarquia de Borel*. O resultado seguinte mostra que esta hierarquia descreve completamente a σ-álgebra de Borel.

Teorema 23.2 (Exaustão dos borelianos)**.** *Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel de um espaço topológico metrizável X. Então*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Pi^0_\alpha = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Delta^0_\alpha.$$

Em outras palavras, cada conjunto boreliano possui um nível de complexidade contável e a união de todos esses níveis esgota completamente a σ-álgebra de Borel.

Este resultado mostra que, embora a hierarquia seja construída por um processo transfinito, nenhum conjunto boreliano exige mais do que um número contável de iterações das operações de união e interseção enumeráveis.

Para relacionar esta descrição dos conjuntos borelianos com as funções contínuas, necessitaremos de um resultado clássico da Topologia Geral.

Lema 23.3 (Lema de Urysohn)**.** *Seja X um espaço T_4 (isto é, um espaço normal de Hausdorff; em particular, um espaço metrizável). Então, para quaisquer conjuntos fechados disjuntos $F, \widetilde{F} \subset X$, existe uma função contínua*

$$f : X \longrightarrow [0,1]$$

tal que

$$f(x) = 0, \qquad x \in F,$$

e

$$f(x) = 1, \qquad x \in \widetilde{F}.$$

O Lema de Urysohn mostra que os conjuntos fechados podem ser separados por funções contínuas. Surge então naturalmente a questão de saber até onde esta classe de funções pode ser ampliada recorrendo apenas à operação de passagem ao limite.

A secção seguinte responde parcialmente a esta questão, mostrando que a classe das funções borelianas permanece estável por limites pontuais. Esta propriedade constituirá o ingrediente essencial da demonstração do Teorema de Hausdorff–Lebesgue.

23.2 A classe das funções borelianas é fechada pela convergência pontual

A hierarquia de Borel descreve a complexidade dos conjuntos borelianos. Passamos agora ao estudo das funções borelianas, isto é, das funções cujas imagens inversas de conjuntos borelianos são conjuntos borelianos. Uma propriedade fundamental distingue esta classe das funções contínuas. Enquanto o limite pontual de uma sucessão de funções contínuas pode deixar de ser contínuo, veremos que a classe das funções borelianas permanece estável por limites pontuais. Esta estabilidade constitui o ingrediente essencial da demonstração do Teorema de Hausdorff–Lebesgue.

O resultado seguinte estabelece precisamente esta propriedade.

Lema 23.4. *Seja X um espaço topológico e seja (f_n) uma sucessão de funções borelianas*

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que converge pontualmente para uma função

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Então f é boreliana.

Demonstração. Para mostrar que f é boreliana, basta verificar que $f^{-1}(U)$ é um conjunto boreliano para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$. Como os intervalos da forma $(a, +\infty)$ geram a tribo de Borel de $\mathbb{R}$, basta mostrar que

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

é boreliano para todo $a \in \mathbb{R}$. Como $f_n(x) \to f(x)$ pontualmente, temos

$$\{f > a\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ f_n > a + \frac{1}{m} \right\}.$$

Com efeito, $f(x) > a$ se, e somente se, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > a + \frac{1}{m}$, e, pela convergência pontual, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_n(x) > a + \frac{1}{m}, \qquad \forall\, n \geq N.$$

Como cada f_n é boreliana,

$$\left\{ f_n > a + \frac{1}{m} \right\} = f_n^{-1}\left(\left(a + \frac{1}{m}, +\infty \right) \right)$$

é um conjunto boreliano.

Como a tribo de Borel é fechada por uniões e interseções enumeráveis, segue que $\{f > a\}$ é boreliano. Logo, $f^{-1}((a, +\infty))$ é boreliano para todo $a \in \mathbb{R}$, concluindo que f é uma função boreliana. □

Nota 23.5. O lema anterior mostra que a classe das funções borelianas é fechada por limites pontuais. Resta demonstrar que esta propriedade caracteriza completamente as funções borelianas. É precisamente esse o conteúdo do Teorema de Hausdorff–Lebesgue.

23.3 Teorema de Hausdorff–Lebesgue

O lema anterior mostrou que a classe das funções borelianas é fechada por limites pontuais. Surge então naturalmente a questão de saber se esta propriedade caracteriza completamente as funções borelianas. O Teorema de Hausdorff–Lebesgue responde afirmativamente. Mais precisamente, mostra que a classe das funções borelianas é a menor classe de funções que contém todas as funções contínuas e é fechada por limites pontuais. Este resultado constitui uma das ligações mais profundas entre Topologia e Teoria da Medida. Com efeito, mostra que toda a estrutura mensurável pode ser reconstruída a partir das funções contínuas recorrendo apenas à operação de passagem ao limite.

Felix Hausdorff
(1868–1942)

Na demonstração do teorema desempenhará um papel central a classe

$$S,$$

definida como a menor classe de funções de X em $\mathbb{R}$ que contém todas as funções contínuas e é fechada por limites pontuais. Começamos por estabelecer dois resultados técnicos sobre esta classe.

Lema 23.6. *Se $O \subset X$ é aberto, então $\chi_O \in S$.*

Demonstração. Seja (C_n) uma sucessão crescente de conjuntos fechados tal que $C_n \uparrow O$. Pelo Lema de Urysohn, existe, para cada n, uma função contínua $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$f_n = 1 \quad \text{em } C_n, \qquad f_n = 0 \quad \text{em } O^c.$$

Como $f_n(x) \longrightarrow \chi_O(x)$ pontualmente, concluímos que $\chi_O \in S$. □

O caso dos conjuntos fechados é uma consequência imediata.

Lema 23.7. *Se $F \subset X$ é fechado, então $\chi_F \in S$.*

Demonstração. Como $\chi_F = 1 - \chi_{F^c}$ e F^c é aberto, segue do lema anterior que $\chi_F \in S$. □

Lema 23.8 (Propriedades de estabilidade de S)**.** *A classe S satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $f, g \in S$ e $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\Phi(f, g) \in S$.*
2. *Se (B_n) é uma sucessão de subconjuntos de X tal que*

$$\chi_{B_n} \in S, \qquad \forall n \geq 1,$$

então $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \in S$.

Demonstração. Para demonstrar a primeira propriedade, sejam $f, g \in S$. Pela definição de S, existem sucessões de funções obtidas a partir de funções contínuas por passagens sucessivas ao limite pontual que convergem pontualmente para f e g. Como Φ é contínua, a composição correspondente converge pontualmente para $\Phi(f, g)$. Logo, $\Phi(f, g) \in S$. Em particular, S é estável por somas, produtos, máximos e mínimos finitos. Para a segunda propriedade, defina

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

Pela primeira propriedade, $\chi_{C_n} = \max\{\chi_{B_1}, \ldots, \chi_{B_n}\} \in S$. Além disso, $C_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, pelo que

$$\chi_{C_n} \longrightarrow \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}$$

pontualmente. Como S é fechada por limites pontuais, concluímos que $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \in S$. □

Lema 23.9. *Toda função boreliana $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limite pontual de uma sucessão de funções simples borelianas.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, particionemos $\mathbb{R}$ em intervalos semiabertos de comprimento 2^{-n}:

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Definamos

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}, \qquad \text{se } f(x) \in I_{k,n}.$$

Como

$$\varphi_n^{-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) = f^{-1}(I_{k,n}),$$

e os intervalos $I_{k,n}$ são borelianos, segue que cada φ_n é uma função simples boreliana. Além disso,

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n},$$

para todo $x \in X$. Logo,

$$\varphi_n(x) \longrightarrow f(x), \qquad \forall x \in X.$$

□

Teorema 23.10 (Hausdorff–Lebesgue)**.** *Seja X um espaço metrizável. A classe das funções borelianas $B(X,\mathbb{R})$ é a menor classe de funções de X em $\mathbb{R}$ que contém todas as funções contínuas e é fechada sob limites pontuais.*

Demonstração. Pela definição de S, basta mostrar que

$$S = B(X,\mathbb{R}).$$

A demonstração será feita em quatro etapas.

1.º passo. Mostremos que $S \subset B(X,\mathbb{R})$. Toda função contínua é boreliana, pois a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto e, portanto, um conjunto boreliano. Além disso, pelo Lema 23.4, a classe das funções borelianas é fechada por limites pontuais. Como S contém todas as funções contínuas e é, por definição, a menor classe fechada por limites pontuais com essa propriedade, concluímos que

$$S \subset B(X,\mathbb{R}).$$

2.º passo. Mostremos que as funções características dos conjuntos borelianos pertencem a S. Provaremos, por indução transfinita sobre a hierarquia de Borel, que

$$\chi_B \in S, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(X).$$

A propriedade é verdadeira para o primeiro nível da hierarquia. Com efeito, pelos Lemas 23.6 e 23.7, as funções características dos conjuntos abertos, que formam a classe Σ_1^0, e dos conjuntos fechados, que formam a classe Π_1^0, pertencem a S. Suponhamos agora que ela vale para todas as classes Σ_β^0 e Π_β^0, com $\beta < \alpha$. Pela definição da hierarquia de Borel, os conjuntos das classes Σ_α^0 e Π_α^0 obtêm-se, respetivamente, por uniões enumeráveis e por complementação a partir de conjuntos pertencentes às classes anteriores. Assim, pelo Lema 23.8, concluímos que

$$\chi_B \in S, \qquad \forall\, B \in \Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0.$$

Como

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0,$$

segue que

$$\chi_B \in S, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(X).$$

3.º passo. Mostremos que todas as funções simples borelianas pertencem a S. Seja

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$$

uma função simples boreliana, onde $c_k \in \mathbb{R}$ e $E_k \in \mathcal{B}(X)$. Pelo passo anterior,

$$\chi_{E_k} \in S, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Como S é estável por combinações lineares finitas, segue que $\varphi \in S$. Concluímos, portanto, que toda função simples boreliana pertence a S.

4.º passo. Mostremos que $B(X,\mathbb{R}) \subset S$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função boreliana. Pelo Lema 23.9, existe uma sucessão (φ_n) de funções simples borelianas tal que

$$\varphi_n(x) \longrightarrow f(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Pelo passo anterior,

$$\varphi_n \in S, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Como S é fechada por limites pontuais, concluímos que $f \in S$. Logo,

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \subset S.$$

Combinando esta inclusão com $S \subset \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, obtida no primeiro passo, concluímos que

$$S = \mathcal{B}(X,\mathbb{R}).$$

□

Nota histórica

O estudo das funções borelianas teve origem, no final do século XIX e no início do século XX, nos trabalhos de René Baire, Émile Borel, Felix Hausdorff e Henri Lebesgue [9, 4, 47, 38]. Enquanto Borel introduziu a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos, Hausdorff desenvolveu a hierarquia de Borel através de uma construção transfinita, e Lebesgue mostrou como estas estruturas se relacionam com a integração e a teoria da medida. O Teorema de Hausdorff–Lebesgue estabelece que as funções borelianas são precisamente aquelas que podem ser obtidas a partir de funções contínuas por passagens sucessivas ao limite pontual. Este resultado constitui uma das primeiras ligações profundas entre Topologia, Teoria da Medida e Análise Funcional.

Nota bibliográfica

O Teorema de Hausdorff–Lebesgue ocupa um lugar central no estudo das funções borelianas e é apresentado em diversos tratados clássicos de Teoria da Medida e de Topologia Descritiva. Entre as referências mais acessíveis, destacam-se *Measure Theory*, de D. L. Cohn [18], *Measure Theory*, de V. I. Bogachev [8], *Probability Measures on Metric Spaces*, de K. R. Parthasarathy [62], e *A Course on Borel Sets*, de S. M. Srivastava [72]. Para um estudo mais aprofundado da hierarquia de Borel e das classes de Baire, pode consultar-se *Classical Descriptive Set Theory*, de A. S. Kechris [43], atualmente uma das principais referências em Topologia Descritiva. A demonstração apresentada neste capítulo segue uma abordagem construtiva, baseada nas funções características dos conjuntos borelianos e na aproximação por funções simples. Esta apresentação evita recorrer explicitamente à teoria das classes de Baire, privilegiando uma demonstração mais próxima das técnicas desenvolvidas ao longo deste livro.borelianas e é apresentado na maioria dos tratados clássicos de Teoria da Medida e de Topologia Descritiva. Entre as referências mais acessíveis destacam-se os livros de Donald L. Cohn, Vladimir I. Bogachev, K. R. Parthasarathy e S. M. Srivastava. Uma abordagem mais aprofundada da hierarquia de Borel e das classes de Baire pode ser encontrada na monografia de Alexander S. Kechris, hoje considerada uma das principais referências em Topologia Descritiva. A demonstração apresentada neste capítulo segue uma abordagem construtiva, baseada nas funções características dos conjuntos borelianos e na aproxi-

mação por funções simples. Esta apresentação evita recorrer explicitamente à teoria das classes de Baire, privilegiando uma prova mais próxima das técnicas desenvolvidas ao longo deste livro.

Capítulo 24

Guia de exercícios

> The only way to learn mathematics is to do mathematics.
>
> — Paul R. Halmos

24.1 Parte I — Fundamentos da Análise Matemática

Exercício 1 (M)

Demonstrar que uma função real monótona definida num intervalo é descontínua num conjunto, no máximo, numerável.

Exercício 2 (M)

1. Mostrar que todo subconjunto compacto de um espaço topológico é compacto relativamente à topologia induzida.
2. Demonstrar que a imagem contínua de um compacto é compacta.
3. Dar um exemplo de um recobrimento infinito que admite um sub-recobrimento finito e de outro que não o admite.

Exercício 3 (M)

Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Demonstrar que todo conjunto compacto $K \subset X$ é fechado.
Sugestão: mostrar que $X \setminus K$ é aberto, usando a separação de pontos por abertos disjuntos.

Exercício 4 (M)

1. Demonstrar que todo espaço compacto é paracompacto.
2. Dar um exemplo de espaço paracompacto que não seja compacto.
3. Demonstrar que todo espaço métrico é paracompacto.

Exercício 5 (D)

Demonstrar que todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.

Exercício 6 (M)

Demonstrar que um espaço metrizável é (i) normal; (ii) Hausdorff; (iii) paracompacto.

Exercício 7 (F)

Demonstrar que um compacto de X é limitado se X for métrico.

Exercício 8 (M)

Mostre que a função distância $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Exercício 9 (D)

Seja (X, d) um espaço métrico separável. Prove que X satisfaz o segundo axioma da numerabilidade.

Dizemos que um espaço topológico X é *de segunda contagem* se existe uma base numerável para a sua topologia; isto é, existe uma família numerável $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ de abertos tal que todo aberto de X pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.

Exercício 10 (M)

Seja (X, d) um espaço métrico separável e localmente compacto. Prove que X é σ-compacto.
Dizemos que um espaço topológico X é *σ-compacto* se existe uma sucessão (K_n) de subconjuntos compactos de X tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Exercício 11 (F)

Demonstre as propriedades anteriores.

Exercício 12 (F)

Demonstre que:

1. $$f + g = \max(f, g) + \min(f, g).$$
2. $$|f - g| = \max(f, g) - \min(f, g).$$
3. $$|f - g| = f + g - 2\min(f, g).$$

Exercício 13 (F)

Demonstre a última desigualdade.

Exercício 14 (F)

Demonstre as desigualdades da proposição anterior.

Exercício 15 (F)

Para cada uma das sucessões seguintes, determine:

- $\limsup_{n\to\infty} a_n$;
- $\liminf_{n\to\infty} a_n$;
- $\lim_{n\to\infty} a_n$, caso exista.

1. $$a_n = n(-1)^n;$$
2. $$a_n = 2 + \frac{n+1}{n};$$
3. $$a_n = 2(-1)^n + \frac{n+1}{n};$$
4. $$a_n = n\big((-1)^n + 1\big) + (-1)^n.$$

Exercício 16 (F)

Demonstre que, se

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad a_n \geq 0,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Exercício 17 (M)

Demonstre que o invólucro superior de uma família de funções semicontínuas inferiormente é semicontínuo inferiormente.

Exercício 18 (F)

Seja $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = x^n.$$

Determine:

1. o limite pontual
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x);$$
2. se (F_n) converge uniformemente em $[0,1]$;
3. se a convergência é uniforme em $[0,a]$, com $0 < a < 1$.

Exercício 19 (F)

Seja $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Determine:

1. o limite pontual da sucessão (F_n);
2. se (F_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$;
3. se a convergência é uniforme em qualquer intervalo limitado $[-A, A]$.

Exercício 20 (F)

Demonstrar o Teorema de Heine–Cantor.

Exercício 21 (F)

Construa um exemplo que mostre que $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ não é completo para a norma do supremo.

Exercício 22 (F)

Construa um exemplo que mostre que $\mathcal{C}_c(X, Y)$ não é completo para a norma do supremo.

Exercício 23 (M)

Mostre que, se $f \in \mathcal{C}(X)$, então $f^+, f^- \in \mathcal{C}(X)$.

Exercício 24 (M)

Seja $A \in V'$.
Mostre que

$$\|A\|_{V'} = \inf \{C > 0 : |A(u)| \leq C\|u\|_V, \quad \forall\, u \in V\}.$$

Conclua que $\|A\|_{V'}$ é a menor constante para a qual vale a desigualdade

$$|A(u)| \leq C\|u\|_V, \qquad \forall\, u \in V.$$

Exercício 25 (F)

Mostre que a aplicação

$$A \longmapsto \|A\|_{V'}$$

define uma norma no espaço dual V'.

Exercício 26 (M)

Mostre que a aplicação

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u \longmapsto \|u\|_V,$$

é contínua.

Exercício 27 (M)

Justifique a observação anterior.

1. Mostre que, se
$$\{x \in X : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$$
é compacto para todo $\varepsilon > 0$, então f é limitada.
2. Conclua que $\|f\|_\infty < +\infty$.
3. Mostre que, quando $X = \mathbb{R}^n$, a condição
$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ é compacto para todo } \varepsilon > 0$$
é equivalente a
$$f(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } |x| \longrightarrow +\infty.$$

Exercício 28 (D)

Seja V um espaço vetorial normado e
$$A : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
uma forma linear não identicamente nula.
Mostre que A é contínua se, e somente se,
$$\ker(A)$$
é um subconjunto fechado de V.

Exercício 29 (F)

Seja
$$u : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

1. Verifique que u é um funcional linear.
2. Mostre que u é positivo, isto é,
$$f \geq 0 \Longrightarrow u(f) \geq 0.$$
3. Utilize a desigualdade
$$|u(f)| \leq u(|f|)$$
para mostrar que u é contínuo.
4. Calcule $\|u\|$.

Exercício 30 (F)

Sejam $a, b \geq 0$ e $a + b = 1$. Considere
$$v : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad v(f) = af(0) + bf(1).$$

1. Verifique que v é um funcional linear.
2. Mostre que v é positivo.

3. Utilize a desigualdade
$$|v(f)| \leq v(|f|)$$
para mostrar que v é contínuo.
4. Calcule $\|v\|$.

Exercício 31 (F)

Seja $x_0 \in [0,1]$. Considere o funcional de avaliação

$$\delta_{x_0} : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_{x_0}(f) = f(x_0).$$

1. Verifique que δ_{x_0} é um funcional linear.
2. Mostre que δ_{x_0} é positivo.
3. Mostre que δ_{x_0} é contínuo.
4. Calcule $\|\delta_{x_0}\|$.

Exercício 32 (F)

Mostre que a convergência em norma implica convergência forte.

Exercício 33 (D)

Seja $I = [a,b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e considere $\mathcal{C}(I)$ munido da norma do supremo.

1. Mostre que, para todo funcional positivo
$$u : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R},$$
se verifica
$$|u(f)| \leq u(|f|), \qquad \forall f \in \mathcal{C}(I).$$
2. Seja
$$e(x) = 1, \qquad x \in I.$$
Deduzir que todo funcional positivo é limitado e calcular a sua norma em função de $u(e)$.
3. Generalizar os resultados anteriores ao espaço $\mathcal{C}_0(X)$.

Exercício 34 (F)

Mostrar que a função
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$
é Riemann-integrável em $[0,1]$ e calcular a sua integral.

Exercício 35 (M)

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Demonstrar que:

(i) $\omega_{|f|}[D] \leq \omega_f[D]$. (**Sugestão: utilizar a desigualdade triangular inversa.**)

(ii)

$$\omega_f(x) = \lim_{\substack{|A|\to 0 \\ x\in A\subset D}} \omega_f[A].$$

(iii) f **é contínua em** $x \in D$ **se e somente se**

$$\omega_f(x) = 0.$$

Exercício 36 (D)

Demonstrar que f é contínua em todo ponto irracional de $[0, 1]$.

Exercício 37 (F)

Mostre que todo subconjunto de um conjunto de medida zero tem igualmente medida zero.

Exercício 38 (M)

Mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sugestão: introduzir um parâmetro e considerar

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad t > 0,$$

derivando depois em ordem a t.

Exercício 39 (F)

Mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

diverge.

Exercício 40 (M)

Demonstrar que o rearranjo dos termos de uma série absolutamente convergente não altera a soma.

Exercício 41 (M)

Seja

$$\mu := \sum_{n\geq 1} c_n \delta_{x_n},$$

onde δ_a denota a medida de Dirac no ponto a. Demonstrar que μ é uma medida de

Radon finita se e somente se

$$\sum_{n\geq 1} |c_n| < \infty.$$

Exercício 42 (D)

Demonstrar o Teorema de Riemann sobre rearranjos.

Exercício 43 (F)

Encontrar um exemplo de série condicionalmente convergente e construir rearranjos cuja soma seja:

1. um número real arbitrário;
2. $+\infty$;
3. $-\infty$;
4. uma série sem limite.

Exercício 44 (M)

Demonstrar que, num espaço normado completo, toda série absolutamente convergente é convergente.

Exercício 45 (M)

Demonstrar que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i$$

é absolutamente convergente se e somente se, para toda a permutação $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série reordenada converge e

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\pi(i)}.$$

Exercício 46 (M)

Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de pontos dois a dois distintos e seja

$$\mu := \sum_{n\geq 1} c_n \delta_{x_n},$$

onde δ_a denota a medida de Dirac no ponto a. Demonstrar que μ define uma medida de Radon finita se e somente se

$$\sum_{n\geq 1} |c_n| < \infty.$$

Exercício 47 (F)

Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Demonstrar que a sucessão (a_n) converge em $\mathbb{R}$.

24.2 Parte II – A Construção Funcional da Integral de Lebesgue

Exercício 48 (F)

Demonstrar o lema anterior.

Exercício 49 (F)

Demonstrar que

$$\mathcal{L}(\Omega) \subset \mathcal{L}^+(\Omega, d\mu).$$

Exercício 50 (F)

Seja

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e defina

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(a) Determine o limite pontual f.
(b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Exercício 51 (F)

Seja

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in [0, 1],$$

e defina

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(a) Determine o limite pontual f.
(b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Exercício 52 (M)

Seja $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ mensurável relativamente à medida produto $\mu_1 \otimes \mu_2$. Mostre que se, para μ_2-quase todo $x_2 \in \Omega_2$, o conjunto seccional

$$S_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in S\}$$

é desprezável com respeito a μ_1, então S é desprezável com respeito a $\mu_1 \otimes \mu_2$.
Sugestão: aplicar o teorema de Tonelli à função caraterística χ_S.

Exercício 53 (F)

1. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: todo o conjunto aberto de $\mathbb{R}$ com medida de Lebesgue finita é limitado.
2. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: existe um conjunto aberto e denso em $[0,1]$ com medida de Lebesgue nula.
3. Dizer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa, apresentando um exemplo ou um contraexemplo: existe um conjunto aberto e denso em $[0,1]$ com medida de Lebesgue estritamente menor do que 1.

Exercício 54 (M)

1. **Aproximação por abertos.** Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e seja $\varepsilon > 0$. Provar que existe um conjunto aberto $G \supset A$ tal que

$$\mu(G \setminus A) < \varepsilon.$$

2. **Aproximação por fechados.** Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e seja $\varepsilon > 0$. Provar que existe um conjunto fechado $F \subset A$ tal que

$$\mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Exercício 55 (D)

1. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e tal que f' é limitada em $(0,1)$. Mostrar que

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

2. Mostrar, mediante um contraexemplo, que não se pode substituir a hipótese de que f é derivável em $(0,1)$ pela hipótese de que f é derivável quase em toda a parte em $(0,1)$.

Exercício 56 (F)

1. Dar um exemplo de uma função Lebesgue-integrável em $[0,1]$ que não seja Cálculo-integrável.

2. Dar um exemplo de uma função Cálculo-integrável em $[0,1]$ que não seja Lebesgue-integrável. Considerar, para esse efeito, uma integral imprópria.

Exercício 57 (D)

(i) Mostrar que, se $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa e finita, então f é contínua.
(ii) Mostrar que f é Lipschitz contínua em todo compacto $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

Exercício 58 (D)

Mostrar que toda função convexa própria definida em um espaço vetorial topológico separado de dimensão finita é contínua no interior do seu domínio efetivo.

Exercício 59 (F)

Sejam $f(x) = x^{1/3}$ e $g(x) = x^{1/4}$ em $[0,1]$, com $p = 4$.
(i) Determinar q tal que $f \in L^p$ e $g \in L^q$.
(ii) Aplicar e verificar a desigualdade de Hölder.

Exercício 60 (F)

Sejam $f = \chi_{[0,1]}$, $g = \chi_{[1,2]}$ e considere-se a medida de Lebesgue.
(i) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} fg\,dx$.
(ii) Escolher p e q conjugados e calcular $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$.
(iii) Verificar a desigualdade de Hölder.

Exercício 61 (F)

(i) Se $f, g \in L^3(\Omega,\mu)$, mostrar que $f^2 g$ é integrável.
(ii) Se $f, g \in L^r(\Omega,\mu)$, determinar $r > 0$ para que $f^2 g^2$ seja integrável.

Exercício 62 (M)

Sejam $p, q, r \geq 1$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Se $f \in L^p(\Omega,\mu)$ e $g \in L^q(\Omega,\mu)$, demonstrar que

$$fg \in L^r(\Omega,\mu)$$

e que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Exercício 63 (M)

Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 < p < \infty$.

(i) Mostrar que

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

está bem definida.

(ii) Mostrar que

$$F(x) = \mathcal{O}\Big(x^{(p-1)/p}\Big).$$

(iii) Mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$\left(\int_a^\infty |f|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

(iv) Deduzir que

$$F(x) = o\Big(x^{(p-1)/p}\Big), \qquad x \to +\infty.$$

Exercício 64 (F)

Seja $p \in [1, +\infty]$ e $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. Mostrar que

$$\max(|f|, |g|) \in L^p(\Omega, \mu).$$

Exercício 65 (D)

Seja dt a medida de Lebesgue em $[0, 1]$ e $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para todo $p \in]1, \infty]$, considere a aplicação

$$\varphi : L^p([0,1], dt) \longrightarrow K, \qquad \varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,dt.$$

1. Dizer, justificando, se φ é uma forma linear contínua. Em caso afirmativo, calcular a sua norma.
2. Faz sentido definir uma forma linear

$$u(f) = f(0)$$

em $L^p(\mathbb{R})$? Em caso afirmativo, dizer se é contínua e calcular a sua norma.

Exercício 66 (F)

Dar um exemplo de uma sucessão limitada em $L^1(\mathbb{R})$ que converge pontualmente para 0, mas não converge em norma de L^1.

Exercício 67 (M)

Seja $f \in L^1(\Omega, \mu)$ e $(f_n) \subset L^1(\Omega, \mu)$ uma sucessão de funções positivas tal que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{q.t.p.}, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Mostrar que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{em } L^1(\Omega, \mu).$$

Dica: utilizar a identidade

$$|f_n - f| = f_n + f - 2\min(f_n, f).$$

Exercício 68 (D)

Seja f uma forma linear em $L^2(]0,1[)$ tal que

$$u \geq 0 \Longrightarrow f(u) \geq 0.$$

Provar, por contradição, que f é contínua para a norma $\|\cdot\|_2$ e mostrar que não é necessariamente contínua para a norma $\|\cdot\|_1$.

Exercício 69 (F)

Dar um exemplo de uma norma que não satisfaz a identidade do paralelogramo.

Exercício 70 (M)

Demonstrar que

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

define um produto interno.
Dica: verificar primeiro a linearidade provando que

$$(f+g|h) + (f-g|h) = 2(f|h).$$

Exercício 71 (M)

(i) Encontrar uma função definida em $(0,1)$ que pertença a $\mathcal{L}^3(0,1)$, mas não pertença a $\mathcal{L}^4(0,1)$.
(ii) Encontrar uma função definida em $(1,\infty)$ que pertença a $\mathcal{L}^3(1,\infty)$, mas não pertença a $\mathcal{L}^2(1,\infty)$.

Exercício 72 (F)

Mostrar que a norma de $L^p(\Omega,\mu)$ é contínua relativamente à convergência em L^p.

Exercício 73 (F)

O conjunto das *funções em escada*, isto é, das combinações lineares finitas de funções indicadoras de retângulos, ou de cubos, é denso em $\mathcal{C}_c(\Omega)$ relativamente à norma de L^p, para $1 \leq p < \infty$. Demonstrar esta afirmação e deduzir que as funções em escada são densas em $L^p(\Omega)$.

Exercício 74 (M)

Considere $\Omega = [0,1]$ e $f \in L^p([0,1])$, com $1 \leq p < \infty$. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$,

existe uma função em escada s tal que

$$\|f - s\|_p < \varepsilon$$

e todos os valores de s são racionais.
Dica: combine truncamento, aproximação por funções em escada e aproximação de números reais por números racionais.

Exercício 75 (M)

Seja $f \in L^1([0,1])$ não negativa. Construa uma sucessão (s_n) de funções em escada não negativas tal que

$$s_n \longrightarrow f \quad \text{em } L^1([0,1]).$$

Dica: use truncamento e subdivisões do intervalo.

Exercício 76 (M)

Seja $1 \leq q < \infty$ e $x_0 \in (0,1)$. Demonstrar que o conjunto

$$\{f \in L^q(0,1) : f = 0 \text{ numa vizinhança de } x_0\}$$

é denso em $L^q(0,1)$.

Exercício 77 (M)

(i) Demonstrar a seguinte caracterização da convexidade uniforme: um espaço normado X é uniformemente convexo se, e somente se, para todas as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\|x_n\|,\ \|y_n\| \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tem-se

$$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \longrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - y_n\| \longrightarrow 0.$$

(ii) Seja X um espaço uniformemente convexo. Mostrar que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ satisfaz

$$\|x_n\| \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\| \longrightarrow 1, \qquad n, m \to \infty,$$

então (x_n) é uma sucessão de Cauchy.

Exercício 78 (M)

Seja $f \in L^q(0,1)$, com $1 \leq q < \infty$. Mostre que $|f|^q \in L^1(0,1)$ e que a aplicação

$$A \longmapsto \int_A |f(x)|^q \, dx,$$

definida sobre os conjuntos mensuráveis de $(0,1)$, é absolutamente contínua em relação

à medida de Lebesgue.

Exercício 79 (M)

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Investigue se existe uma sucessão

$$(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x)\varphi_n(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g(x)f(x)\,dx, \qquad \forall\, g \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Exercício 80 (F)

Dê um exemplo de uma função que pertença a

$$\bigcap_{1<p<\infty} L^p(\mathbb{R}),$$

mas que não pertença a $L^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 81 (F)

Mostre, através de exemplos ou contraexemplos, que os espaços $L^p(\mathbb{R})$ e $L^q(\mathbb{R})$ não são comparáveis quando $p \neq q$.

Exercício 82 (M)

Determine para quais valores de

$$1 \leq p \leq \infty$$

a função

$$f(x) = \frac{1}{|\ln x|}$$

pertence a

$$L^p((0,1)).$$

Exercício 83 (D)

Mostre que o espaço dual de $L^\infty(0,1)$, denotado por $(L^\infty(0,1))'$, é estritamente maior do que $L^1(0,1)$, isto é,

$$L^1(0,1) \subsetneq (L^\infty(0,1))'.$$

Considere a inclusão canónica

$$L^1(0,1) \ni f \longmapsto \Lambda_f,$$

onde

$$\Lambda_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx, \qquad g \in L^\infty(0,1).$$

Sugestão. Fixe $x_0 \in (0,1)$, considere em $C([0,1])$ o funcional

$$T(\varphi) = \varphi(x_0),$$

e prolongue-o a $L^\infty(0,1)$ pelo teorema de extensão de Hahn–Banach. Para mostrar que o prolongamento não é representável por uma função de $L^1(0,1)$, utilize funções contínuas iguais a 1 em x_0, cujos suportes se concentram em torno desse ponto.

Exercício 84 (F)

Dê um contraexemplo que mostre que, em geral,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \not\longrightarrow 0,$$

quando $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 85 (M)

(Lema de Riemann–Lebesgue) Demonstrar que a sucessão

$$f_n(x) = \operatorname{sin}(2\pi n x)$$

converge fracamente para 0 em $L^p(0,1)$ para todo $1 < p < \infty$.

Exercício 86 (F)

Mostrar que o conjunto de Cantor não possui pontos isolados.

Exercício 87 (F)

Mostrar que o conjunto de Cantor é totalmente desconexo.

Exercício 88 (F)

Mostrar que a função característica χ_C é superiormente semicontínua.

24.3 Parte III–A Construção Clássica da Teoria da Medida e da Integral de Lebesgue

Exercício 89 (D)

Demonstrar a unicidade da decomposição de Jordan.

Exercício 90 (D)

Seja $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e μ a medida de contagem

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1.$$

Seja $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Mostrar que f é mensurável e que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Sugestão. Usar a fórmula de Cavalieri,

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > t\}\big) \, dt.$$

Exercício 91 (F)

Mostre que, se $A \subset B$, então

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A),$$

sempre que $\mu(A) < \infty$.

Exercício 92 (M)

Se $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < \infty$, mostrar que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n).$$

Exercício 93 (F)

Mostrar que todo aberto em um espaço métrico é uma união numerável de conjuntos fechados.

Exercício 94 (D)

Demonstrar que a cardinalidade de $\mathcal{B}$ é igual à cardinalidade $\mathfrak{c}$ dos números reais, enquanto a cardinalidade de $\mathcal{L}$ é $2^{\mathfrak{c}}$.

Exercício 95 (F)

Mostre que, se $A, B \subset \mathbb{R}$ têm medida positiva, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\mu((A + q) \cap B) > 0.$$

Exercício 96 (M)

Mostre que, se $A \subset \mathbb{R}$ satisfaz $A + q = A$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, então

$$\mu(A^c) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(A) = 0.$$

Exercício 97 (D)

Mostre que todo mapa aditivo mensurável

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

é linear. Discuta onde o axioma da escolha entra na construção de contraexemplos.

Exercício 98 (F)

Prove diretamente a subaditividade finita do volume: se

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} R_i,$$

então

$$\mu(R) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i).$$

(Sugestão: comece pelo caso $n = 1$ e utilize indução.)

Exercício 99 (F)

Mostre que o conjunto vazio tem medida exterior nula, isto é,

$$\mu^*(\emptyset) = 0.$$

Mostre que qualquer conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$ tem medida exterior nula. Generalize o exemplo dos racionais e prove que qualquer conjunto numerável tem medida exterior zero.

Exercício 100 (M)

Demonstre o Teorema da Convergência Monótona.

Exercício 101 (M)

Enuncie e demonstre o Lema de Fatou.

Exercício 102 (M)

Enuncie e demonstre o Teorema da Convergência Dominada.

Exercício 103 (M)

Sejam $E, F \subseteq X$. Determine se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Em caso de falsidade, forneça um contraexemplo e apresente a formulação correta.

1. $$\chi_{E\cap F} = \min(\chi_E, \chi_F) = \chi_E \chi_F;$$

2. $$\chi_{E\cup F} = \max(\chi_E, \chi_F) = \chi_E + \chi_F;$$

3.
$$\chi_{E^c} = 1 - \chi_E;$$

4.
$$\chi_{E\setminus F} = \chi_E - \chi_F.$$

24.4 Parte IV–Representação e Estrutura das Medidas

Exercício 104 (F)

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e seja

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.
Para $A > 0$, defina-se a truncatura de f por

$$f_A(x) = \begin{cases} -A, & \text{se } f(x) < -A, \\ f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A, \\ A, & \text{se } f(x) > A. \end{cases}$$

Mostre que f_A é $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.

Exercício 105 (M)

Demonstrar que, se $\mu(X) < \infty$ e $f_k \to f$ μ-quase em todo o ponto, então $f_k \to f$ em medida.

Exercício 106 (M)

Demonstrar que, se $f_k \to f$ em medida, então existe uma subsucessão que converge μ-quase em todo o ponto.

Exercício 107 (F)

Demonstrar as seguintes afirmações.

1. Se g é Borel-mensurável e f é Lebesgue-mensurável, então
$$g \circ f$$
é Lebesgue-mensurável.
2. Se f e g são Borel-mensuráveis, então
$$g \circ f$$
é Borel-mensurável.

Exercício 108 (F)

Demonstrar a versão forte do Teorema de Lusin:
Seja X um espaço métrico munido de uma medida regular μ, e seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que

$$\mu(X \setminus K) < \varepsilon$$

e existe uma função contínua

$$g : X \to \mathbb{R}$$

tal que

$$f = g \qquad \text{em } K.$$

Exercício 109 (F)

Seja $f \in L^1(\lambda)$ e seja $\varepsilon > 0$. Demonstrar que existe uma função contínua $g \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Exercício 110 (D)

Seja

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{x_i},$$

onde

$$x_i \in \Omega, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

é um aberto limitado.
Demonstrar que μ é uma medida de Radon se e somente se

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty.$$

Exercício 111 (F)

Demonstrar que, se A é negativo para μ, então

$$B \subset C \subset A \quad \Longrightarrow \quad \mu(C) \leq \mu(B).$$

Exercício 112 (F)

Demonstrar a desigualdade de Chebyshev deduzindo-a da desigualdade de Markov.

Exercício 113 (M)

Defina os conceitos de variável aleatória, esperança e variância, e demonstre a desigualdade de Chebyshev para variáveis aleatórias.

Seja

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Suponha que

$$\mathbb{E}[X] = m, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2 > 0.$$

Mostre que, para todo $k > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - m| \geq k\sigma\big) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Exercício 114 (M)

Seja

$$S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$$

mensurável relativamente à medida produto

$$\mu_1 \otimes \mu_2.$$

Suponha que, para μ_2-quase todo $x_2 \in \Omega_2$, a secção

$$S_{x_2} := \{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in S\}$$

é μ_1-desprezável.
Mostre que S é $\mu_1 \otimes \mu_2$-desprezável.
Sugestão: aplicar o Teorema de Tonelli à função característica χ_S.

Exercício 115 (F)

Seja

$$(X, \mathcal{A}, \mu)$$

um espaço de medida e seja

$$f : X \to [0, +\infty]$$

mensurável.
Mostrar que, para todo $\alpha > 0$,

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}\big) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu.$$

1. Demonstrar a desigualdade.
2. Considerar

   $$f(x) = x, \qquad x \in [0, 1],$$

   munido da medida de Lebesgue, e verificar o resultado para

   $$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Bibliografia

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, 3rd edition, Springer, Berlin, 2006.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[3] R. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, Vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1907.

[4] R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 3^{e} série, Vol. 3 (1899), pp. 1–123.

[5] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Vol. 1, Warszawa, 1932.

[6] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, New York, 1995.

[7] C. E. Blair, *The Baire Category Theorem Implies the Principle of Dependent Choices*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, Vol. 25, No. 10 (1977), pp. 933–934.

[8] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, Vols. I–II, Springer, Berlin, 2007.

[9] É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[10] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Livre VI. Intégration. Chapitres 1–9*, Springer-Verlag, Berlin.

[11] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie Générale. Chapitres 1–10*, Springer-Verlag, Berlin.

[12] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[13] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Vol. 46 (1895), pp. 481–512; Vol. 49 (1897), pp. 207–246.

[14] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V*, Mathematische Annalen, Vol. 21 (1883), pp. 545–591.

[15] P. L. Chebyshev, *Des valeurs moyennes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2e série, Vol. 12 (1867), pp. 177–184.

[16] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 2nd edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

[17] P. G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2013.

[18] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Birkhäuser, New York, 2013.

[19] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd edition, Springer, New York, 1990.

[20] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, 2nd edition, Imperial College Press, London, 2014.

[21] P. J. Daniell, *A General Form of Integral*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 19, No. 4 (1918), pp. 279–294.

[22] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 92, Springer, New York, 1984.

[23] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 9^{e} série, Vol. 23 (1944), pp. 65–76.

[24] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[25] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators. WillemElem,WillemI: General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.

[26] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[27] D. T. Egorov, *Sur les suites de fonctions mes mesurables*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Vol. 152 (1911), pp. 244–246.

[28] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

[29] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Chichester, 2014.

[30] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 153, Springer-Verlag, New York, 1969.

[31] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[32] I. Fonseca and G. Leoni, *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2007.

[33] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 22 (1906), pp. 1–74.

[34] G. Fubini, *Sugli integrali multipli*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 5^{a} série, Vol. 16, 1.^{o} semestre (1907), pp. 608–614.

[35] H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen. Erste Mitteilung*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Vol. 116 (1907), pp. 601–655.

[36] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York, 1950.

[37] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, Oxford, 1949.

[38] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[39] E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 2 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[40] P. Howard and J. E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[41] T. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[42] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 2^{e} éd., vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1893.

[43] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 156, Springer, New York, 1995.

[44] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Blackie & Son, London, 1928.

[45] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Série III, Vol. 7 (1902), pp. 231–359.

[46] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[47] H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6^{e} série, Vol. 1 (1905), pp. 139–216.

[48] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218, Springer, New York, 2013.

[49] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 181, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[50] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, 2nd edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[51] F. Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems: An Introduction to Geometric Measure Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 135, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[52] N. Lusin, *Sur les propriétés des fonctions mesurables*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, Vol. 154 (1912), pp. 1688–1690.

[53] A. A. Markov, *Ischislenie veroiatnostei* [*Cálculo das probabilidades*], Imperatorskaia Akademiia Nauk, São Petersburgo, 1900.

[54] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[55] J. Mawhin, *Analyse. Fondements, techniques, évolution*, De Boeck Université, Bruxelles, 1992.

[56] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 183, Springer, New York, 1998.

[57] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[58] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract M-spaces: A characterization of the space of continuous functions*, Annals of Mathematics, Vol. 42, No. 4 (1941), pp. 994–1024.

[59] A. Markov, *On mean values and exterior densities*, Recueil Mathématique (Matematicheskii Sbornik), Vol. 4(46) (1938), pp. 165–190.

[60] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, 2 vols., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955–1961.

[61] O. Nikodým, *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 15 (1930), pp. 131–179.

[62] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York, 1967.

[63] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Vol. 122 (1913), pp. 1295–1438.

[64] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol. 149 (1909), pp. 974–977.

[65] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th edition, Pearson, Boston, 2010.

[66] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd edition, McGraw–Hill, New York, 1991.

[67] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw–Hill, New York, 1976.

[68] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw–Hill, New York, 1987.

[69] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1963.

[70] H. J. S. Smith, *On the Integration of Discontinuous Functions*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 6 (1875), pp. 140–153.

[71] A. D. Sokal, A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem, *The American Mathematical Monthly*, **118** (2011), no. 5, 450–452.

[72] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 180, Springer, New York, 1998.

[73] L. Tonelli, *Sull'integrazione per parti*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 5ª série, Vol. 18 (1909), pp. 246–253.

[74] S. M. Ulam, *Adventures of a Mathematician*, University of California Press, Berkeley, 1991.

[75] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Mathematische Annalen, Vol. 94 (1925), pp. 262–295.

[76] M. Willem, *Functional Analysis: Fundamentals and Applications*, Cornerstones, Birkhäuser, New York, 2013.

[77] M. Willem, *Analyse Fonctionnelle Élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.

[78] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.