

NOTAS DE CURSO

Geometria Diferencial

Curvas, superfícies e variedades

Estruturas diferenciais e invariância

Nicolas Van Goethem

Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana e Cálculo Exterior

Conteúdo

Prefácio	vii
Introdução	ix
I Geometria das curvas e das superfícies em $\mathbb{R}^3$	1
1 Geometria diferencial das curvas	3
1.1 Curvas parametrizadas e curvas geométricas	3
1.1.1 Curvas parametrizadas e regularidade	3
1.1.2 Curvas geométricas	5
1.1.3 Reparametrizações	5
1.2 Comprimento e parametrização pelo comprimento de arco	6
1.2.1 Comprimento	6
1.2.2 Abscissa curvilínea	6
1.3 Curvas planas e curvatura	7
1.4 Curvas no espaço e triedro de Frenet–Serret	9
1.4.1 Vetor de Darboux e forma matricial	10
1.4.2 Fórmulas numa parametrização arbitrária	11
1.5 Teorema fundamental das curvas	12
1.6 Curvas planas fechadas: grau e índice de rotação	13
1.6.1 Grau de uma aplicação $S^1 \rightarrow S^1$	14
1.6.2 Índice de um ponto relativamente a uma curva	15
1.7 Homotopia regular e teorema de Whitney–Graustein	15
1.8 Teorema das tangentes girantes de Hopf	16
1.9 Curvas regulares por partes e funções de variação limitada	18
1.9.1 Variação total	18
1.9.2 Funções C^1 por partes	19
1.9.3 Umlaufsatz generalizado	19
Notas históricas e bibliográficas	20
2 Geometria extrínseca das superfícies	23
2.1 Superfícies regulares e parametrizações locais	23
2.2 Vetores tangentes como derivações	24
2.3 Base móvel, orientação e aplicação de Gauss	24
2.4 Curvas numa superfície: velocidade e aceleração	25
2.5 Geodésicas	25
2.6 Métrica induzida e primeira forma fundamental	26
2.7 Isometrias, métricas isotérmicas e comprimento	26
2.8 Área, ângulos e aplicações conformes	27

2.9	Segunda forma fundamental	28
2.10	Aplicação de Weingarten	28
2.11	Equações de compatibilidade	29
2.11.1	Equações de Codazzi–Mainardi	29
2.11.2	Sistema matricial de Pfaff	30
2.12	Compatibilidade métrica e conexão de Levi–Civita	30
2.13	Teorema fundamental das superfícies	31
	Notas históricas e bibliográficas	33
	Referências do capítulo	34
3	Geometria intrínseca das superfícies	35
3.1	Curvatura normal e curvas assintóticas	35
3.2	Curvaturas principais, média e de Gauss	36
3.3	Caracterização local dos pontos	37
3.4	Expressão extrínseca das curvaturas principais	37
3.5	O aplicação de Weingarten e as direções principais	38
3.6	Linhas de curvatura	39
3.7	Alguns casos particulares	39
3.8	Expressão explícita dos símbolos de Christoffel	40
3.9	Teorema Egregium de Gauss	41
	Notas históricas e bibliográficas	42
	Referências do capítulo	43
4	Geodésicas e geometria global das superfícies	45
4.1	Consequências e uma segunda demonstração do Teorema Egregium	45
4.2	Rigidez da esfera	46
4.3	Equações intrínsecas das geodésicas	47
4.4	Geodésicas e o problema variacional	48
4.5	Vizinhanças e coordenadas geodésicas	48
4.6	Aplicação exponencial	50
4.7	Interpretações da curvatura de Gauss	50
4.7.1	Curvatura e afastamento das geodésicas	50
4.7.2	Planicidade local, isometrias e teorema de Minding	51
4.7.3	Comprimento e área dos pequenos círculos geodésicos	52
	Notas históricas e bibliográficas	53
	Referências do capítulo	53
5	Teoremas de Gauss–Bonnet	55
5.1	Gauss–Bonnet para triângulos geodésicos	55
5.2	Curvatura geodésica e polígonos curvilíneos	57
5.3	Gauss–Bonnet global	58
5.4	Consequências topológicas	60
5.4.1	Soma conexa e género	60
5.4.2	Característica de Euler das superfícies orientáveis	60
	Notas históricas e bibliográficas	61
	Referências do capítulo	61
6	Derivação covariante e transporte paralelo	63
6.1	Campos vetoriais e derivada covariante	63
6.2	Expressão em coordenadas	64
6.3	Transporte paralelo	65
6.4	Curvatura geodésica	66

6.5	Fibrado tangente e interpretação em termos de conexão	67
	Notas históricas e bibliográficas	68
	Referências do capítulo	68
II	Variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana	69
7	Variedades topológicas e diferenciáveis	71
7.1	Espaços topológicos	71
7.2	Coberturas, paracompacidade e partições da unidade	71
7.3	Espaços localmente euclidianos e atlas	72
7.4	Variedades topológicas e diferenciáveis	73
7.5	Exemplos e contraexemplos	73
7.6	Funções diferenciáveis e espaço tangente	74
7.7	Diferencial de uma aplicação	75
	Notas históricas e bibliográficas	75
	Referências do capítulo	76
8	Imersões, mergulhos e teoremas de Whitney	77
8.1	Rank, imersões e mergulhos	77
8.2	Caracterização local das imersões	79
8.3	Teorema do rank constante	80
8.4	A questão dos mergulhos euclidianos	82
8.5	Teoremas de Whitney	83
8.6	Projeções, Sard e redução da dimensão ambiente	84
	Notas históricas e bibliográficas	86
	Referências do capítulo	86
9	Geometria Riemanniana: métricas, isometrias e mergulhos isométricos	87
9.1	Métricas Riemannianas	87
9.2	Isometrias Riemannianas	88
9.3	Comprimento e distância Riemanniana	88
9.4	Mergulhos isométricos: de Whitney a Nash	89
9.5	Comprimentos preservados e coordenadas na imagem	91
	Notas históricas e bibliográficas	91
	Referências do capítulo	91
10	Tensores, conexões e derivação covariante	93
10.1	Vetores, covetores e tensores	93
10.1.1	Do objeto geométrico às suas componentes	93
10.1.2	Definição multilinear e campos tensoriais	93
10.1.3	Mudança de base e contração	94
10.1.4	Invariantes tensoriais: traço, determinante e métrica	95
10.2	Conexão e símbolos de Christoffel	96
10.2.1	Lei de transformação	97
10.2.2	A conexão como estrutura geométrica	97
10.3	Derivação covariante de vetores e covetores	97
10.4	Torção	98
10.5	Derivada ao longo de curvas, transporte paralelo e geodésicas	99
10.6	Derivação covariante de tensores	100
10.7	Compatibilidade métrica e conexão de Levi-Civita	101
10.8	Conexão plana e preparação para a curvatura	102

Notas históricas e bibliográficas	103
Referências do capítulo	103
11 Curvatura de Riemann	105
11.1 Comutador das derivadas covariantes	105
11.2 Antissimetria, identidade de Bianchi e simetrias	106
11.3 Bracket de Lie e formulação intrínseca	106
11.4 Bases holonômicas e anholonômicas	109
11.5 Dimensão dois e Theorema Egregium	110
11.6 Curvaturas de Ricci e escalar	111
Notas históricas e bibliográficas	111
Referências do capítulo	111
12 Campos de Jacobi	113
12.1 Variações de geodésicas	113
12.2 Equação de Jacobi	113
12.3 Derivadas de $g(J, J)$	114
12.4 Aproximação da métrica pela curvatura	115
12.5 Leitura geométrica	115
12.6 Uma abertura aos sistemas integráveis	115
12.6.1 Integrais primeiras e independência funcional	115
12.6.2 Involução e o teorema de Arnold–Liouville	116
Notas históricas e bibliográficas	117
Referências do capítulo	117
III Formas diferenciais e cálculo exterior	119
13 Álgebra exterior e formas diferenciais	121
13.1 Da geometria multilinear às formas	121
13.2 Formas diferenciais numa variedade	126
13.3 O diferencial exterior	128
13.4 Formas fechadas e exatas	128
13.5 Push-forward de vetores	130
13.6 Homotopias, pull-back e derivada de Lie	130
13.6.1 Homotopias	130
13.6.2 Pull-back de formas diferenciais	131
13.6.3 Fluxos e campos geradores	134
13.6.4 Derivada de Lie	134
13.6.5 Contração e fórmula de Cartan	136
13.6.6 Variação do pull-back	139
13.7 Pullback e naturalidade	141
Notas históricas e bibliográficas	142
Referências do capítulo	142
14 Lema de Poincaré	143
14.1 Lema de Poincaré: formas fechadas são localmente exatas	143
14.2 Operador de homotopia e segunda demonstração do lema de Poincaré	145
14.3 Hipóteses topológicas e exemplos	149
Notas históricas e bibliográficas	151
Referências do capítulo	151

15 Transporte, volume e operadores de Hodge	153
15.1 A métrica, o teorema de Riesz e os isomorfismos musicais	153
15.2 Produto interno em covetores e forma de volume	155
15.3 Volume, divergência e incompressibilidade	155
15.4 Variação da métrica, deformação e campos de Killing	156
15.5 Operador dual de Hodge	158
15.5.1 Área orientada e formas de fluxo	160
15.6 Gradiente, rotacional e divergência em linguagem exterior	160
15.7 Codiferencial e Laplaciano de Hodge	161
Notas históricas e bibliográficas	164
Referências do capítulo	164
16 Integração de formas e teorema de Stokes	165
16.1 Integração e orientação	165
16.2 Teorema de Stokes	166
16.3 Teoremas clássicos como casos particulares	167
16.4 Variação de integrais sobre domínios e superfícies móveis	169
Notas históricas e bibliográficas	173
Referências do capítulo	173
Bibliografia geral	175

Prefácio

A minha formação e atividade científica situam-se principalmente na *Análise Matemática e na Mecânica dos Meios Contínuos*, dois domínios nos quais análise e geometria se encontram naturalmente. Na mecânica, em particular, a descrição das configurações e das deformações coloca constantemente em relação as propriedades próprias de um corpo e a sua realização no espaço ambiente. A distinção entre pontos de vista *intrínseco* e *extrínseco*, que constitui um dos fios condutores destas notas, encontra assim um eco natural nos problemas da mecânica.

Durante a minha formação na Université catholique de Louvain, em Louvain-la-Neuve, tive a oportunidade de seguir dois cursos que marcaram particularmente o meu percurso: um curso de *geometria diferencial*, lecionado por Pierre van Moerbeke, e um curso de *mecânica dos meios contínuos*, lecionado por François Dupret, no qual era dada particular ênfase à noção de *quantidade intrínseca*, nomeadamente no estudo de corpos deformáveis com defeitos. Embora por caminhos diferentes, estes dois ensinamentos contribuíram para o meu interesse pelas relações entre análise, geometria e mecânica e, em particular, pela distinção entre descrições intrínsecas e extrínsecas.

Guardo também desse curso de Pierre van Moerbeke uma recordação que influenciou a maneira como concebo o ensino da geometria: uma parte substancial do curso desenvolvia-se em torno de uma longa demonstração, na minha memória ligada ao teorema de Arnold–Liouville e à geometria das variedades invariantes compactas, na qual os conceitos necessários eram introduzidos progressivamente, à medida que a própria prova os exigia. O objetivo não era apenas chegar ao resultado final; a demonstração constituía o fio condutor para construir a linguagem, compreender as definições e aprender as técnicas. Esta ideia está presente nestas notas: certas demonstrações são deliberadamente desenvolvidas em detalhe e podem mesmo ser apresentadas de mais de uma forma quando cada argumento permite descobrir instrumentos matemáticos diferentes.

Mais tarde, durante a minha estadia como investigador na SISSA, em Trieste, entre 2012 e 2014, tive também a oportunidade de conhecer Boris Dubrovin. A visão da geometria e das suas relações com a análise, a mecânica e a física matemática, desenvolvida nomeadamente na obra de Dubrovin, Fomenko e Novikov, *Modern Geometry – Methods and Applications*, constitui outra referência importante para a orientação destas notas. Estas influências ajudam a explicar o percurso adotado aqui: partir da geometria concreta de curvas e superfícies, distinguir progressivamente as propriedades intrínsecas das que dependem de uma realização no espaço ambiente, e chegar à linguagem das variedades, dos tensores e da invariância, fundamental também na mecânica e na física matemática.

Estas notas resultam, em larga medida, de dois cursos que lecionei no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. O material dedicado às *curvas, superfícies e variedades* tem a sua origem no curso de *Geometria Diferencial*, que lecionei entre 2020 e 2024. No último ano em que lecionei esta disciplina, acrescentei ao programa uma introdução ao cálculo exterior e às formas diferenciais, estabelecendo assim uma primeira passagem da geometria das variedades para as estruturas diferenciais desenvolvidas posteriormente.

O material dedicado às *estruturas diferenciais e à invariância* retoma e reorganiza também conteúdos do curso de *Métodos Matemáticos na Física*, que lecionei entre 2018 e 2021. Nesse curso, estas ferramentas constituíam a base matemática para uma segunda parte dedicada à *relatividade restrita e à relatividade geral*, proporcionando um contexto natural no qual conceitos como invariância, tensores, métricas e formas diferenciais adquiriam uma interpretação geométrica e física concreta.

A reunião destes dois percursos num único texto corresponde, portanto, a uma evolução natural dos próprios cursos: partir da geometria concreta de curvas e superfícies, passar à geometria intrínseca e às variedades diferenciáveis e desenvolver, a partir daí, o cálculo exterior e as estruturas invariantes que permitem formular a geometria de maneira independente das coordenadas.

A arquitetura destas notas é, contudo, uma escolha pessoal. Optei por não começar pela teoria abstrata das variedades. Partimos de curvas e superfícies concretamente imersas no espaço euclidiano e, portanto, de uma geometria inicialmente extrínseca. Procuramos depois identificar aquilo que, nessa geometria, é independente do espaço ambiente, passando progressivamente à geometria intrínseca e às variedades diferenciáveis e riemannianas. Finalmente, através das imersões e dos mergulhos, regressamos ao ponto de vista extrínseco, mas agora no sentido inverso: já não partimos de um objeto dado no espaço ambiente para descobrir a sua geometria intrínseca; partimos de um objeto definido abstratamente e perguntamos como pode ser realizado num espaço ambiente.

Este movimento

$$\boxed{\text{extrínseco} \longrightarrow \text{intrínseco} \longrightarrow \text{abstrato} \longrightarrow \text{realização extrínseca}}$$

constitui a linha orientadora do texto.

Estas notas foram concebidas para acompanhar uma primeira disciplina de geometria diferencial. Procurou-se manter um equilíbrio entre intuição geométrica, formulação rigorosa e demonstração. Os exemplos concretos em dimensão dois e três não são tratados apenas como ilustrações da teoria geral: constituem o terreno a partir do qual as estruturas abstratas são progressivamente identificadas e motivadas.

Introdução

Da geometria extrínseca à geometria intrínseca — e regresso

Considere-se uma superfície regular

$$S \subset \mathbb{R}^3.$$

A sua geometria pode ser estudada de duas maneiras aparentemente muito diferentes.

Um observador exterior dispõe da estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Pode comparar os planos tangentes em pontos diferentes, escolher uma normal unitária N , estudar a aplicação de Gauss

$$N : S \longrightarrow S^2$$

e medir a maneira como a superfície se curva no espaço. Surgem assim a segunda forma fundamental, o operador de Weingarten e as curvaturas principais. Esta é a *geometria extrínseca*.

Um observador confinado à superfície dispõe de menos informação. Pode medir distâncias ao longo de S , ângulos entre curvas, áreas e comprimentos; pode procurar os caminhos localmente mais curtos e transportar vetores ao longo de curvas. Não pode, porém, observar diretamente a normal à superfície nem a maneira como esta está colocada em $\mathbb{R}^3$.

Que parte da geometria pode ainda assim reconstruir? Esta pergunta conduz à *geometria intrínseca*.

A primeira forma fundamental

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad v, w \in T_p S,$$

é inicialmente obtida por restrição do produto interno do espaço ambiente. Uma vez conhecida g , contudo, comprimentos, ângulos e áreas podem ser definidos sem voltar a utilizar $\mathbb{R}^3$. Mais profundamente, a métrica determina uma conexão, permite definir geodésicas e contém informação sobre a própria curvatura.

O resultado paradigmático é o *Theorema Egregium* de Gauss:

a curvatura de Gauss é uma quantidade intrínseca.

Embora seja inicialmente construída a partir das curvaturas principais — objetos aparentemente extrínsecos —, ela pode ser determinada exclusivamente pela métrica da superfície.

Este fenómeno sugere uma mudança radical de perspetiva. Se grande parte da geometria pode ser formulada sem referência ao espaço ambiente, por que razão exigir que o objeto geométrico seja, à partida, um subconjunto de $\mathbb{R}^3$? Chegamos assim às *variedades diferenciáveis*.

Uma variedade é descrita localmente por coordenadas, mas não necessita de estar previamente mergulhada num espaço euclidiano. Os espaços tangentes, campos vetoriais e aplicações diferenciáveis passam a ser definidos intrinsecamente. Dotando a variedade de uma métrica riemanniana, recuperamos em dimensão arbitrária as estruturas encontradas anteriormente nas superfícies:

métrica $\longrightarrow$ conexão de Levi-Civita $\longrightarrow$ geodésicas $\longrightarrow$ curvatura de Riemann.

O movimento do curso não termina, contudo, nesta abstração. Uma vez construída uma geometria sem espaço ambiente, podemos formular novamente a pergunta extrínseca, agora no sentido inverso:

Pode uma variedade abstrata ser realizada num espaço euclidiano?

É neste ponto que as noções de *imersão* e de *mergulho* adquirem todo o seu significado. Já não constituem apenas generalizações técnicas das superfícies de $\mathbb{R}^3$; exprimem a relação entre uma geometria definida abstratamente e uma sua realização concreta.

Esta ida e volta organiza o texto:

extrínseco $\longrightarrow$ intrínseco $\longrightarrow$ abstrato $\longrightarrow$ realização extrínseca.

A primeira parte estuda curvas e superfícies no espaço euclidiano. O triedro de Frenet, as formas fundamentais, o operador de Weingarten e as equações fundamentais das superfícies fornecem o quadro extrínseco. A curvatura de Gauss, as geodésicas e os teoremas de Gauss–Bonnet conduzem progressivamente ao ponto de vista intrínseco.

A segunda parte introduz as variedades diferenciáveis e riemannianas. As construções encontradas anteriormente em superfícies são então reformuladas sem recurso a um espaço ambiente: conexão de Levi–Civita, derivação covariante, tensor de curvatura, geodésicas e campos de Jacobi. As imersões e os mergulhos permitem finalmente comparar as duas descrições e compreender em que sentido uma geometria abstrata pode ser realizada exteriormente.

A terceira parte desenvolve a linguagem do cálculo diferencial sobre variedades. A álgebra exterior, as formas diferenciais, a diferencial exterior, o operador de Hodge e a integração fornecem uma linguagem que unifica muitos dos conceitos introduzidos anteriormente e prepara resultados globais em geometria e análise.

Há, portanto, uma intenção metodológica por detrás da ordem escolhida: não começar pela abstração, mas chegar a ela quando os objetos que a justificam já foram encontrados geometricamente. A variedade abstrata não surge como uma definição formal colocada no início do curso; surge como resposta natural às limitações do ponto de vista extrínseco.

O papel das demonstrações. As demonstrações apresentadas nestas notas não têm apenas a função de estabelecer a validade dos resultados. Constituem também uma parte essencial da aprendizagem dos conceitos e dos métodos da geometria diferencial. Uma demonstração permite frequentemente compreender por que razão uma definição é formulada de determinada maneira, como diferentes noções se articulam e quais são as técnicas que podem ser reutilizadas noutros problemas. Por esta razão, algumas demonstrações são desenvolvidas em detalhe e, em certos casos, apresentam-se duas demonstrações do mesmo resultado quando estas revelam aspetos matemáticos distintos. É, por exemplo, o caso do lema de Poincaré: a segunda demonstração, baseada numa homotopia radial, na derivada de Lie, na contração e no operador de homotopia, interessa não apenas como nova prova do resultado, mas também porque permite compreender estas construções e a forma como interagem.

Assim, ao longo destas notas, uma demonstração deve ser lida simultaneamente como justificação de um resultado e como instrumento para compreender e aprender a utilizar a linguagem da geometria diferencial.

E, uma vez construída a teoria intrínseca, regressamos ao espaço ambiente com uma pergunta diferente daquela com que começámos. No início, a superfície era dada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$; no regresso, perguntamos quando e como uma geometria definida abstratamente pode ser representada dessa forma.

Invariância, tensores e leis físicas

A escolha de coordenadas fornece uma descrição de um objeto geométrico, mas não altera o próprio objeto. As componentes de um vetor, de uma métrica ou de um campo de tensões podem mudar

sem que a grandeza representada mude. A *invariância* exprime esta independência relativamente à descrição; não significa que todas as componentes permaneçam numericamente iguais.

Os *tensores* tornam esta ideia precisa: são objetos multilineares intrínsecos cujas componentes obedecem a leis determinadas de transformação. Na física e na mecânica dos meios contínuos, esta linguagem permite escrever relações entre grandezas geométricas sem privilegiar um sistema de coordenadas. Por exemplo, a deformação pode ser descrita por uma forma bilinear, e uma lei constitutiva elástica linear relaciona deformação e tensão através de um tensor de ordem quatro. A invariância por mudança de coordenadas deve distinguir-se da objetividade perante mudanças de observador físico, embora a linguagem tensorial seja essencial para formular ambas.

Uma expressão com valor real não é necessariamente um escalar intrínseco. Veremos no capítulo dos tensores que o traço de um endomorfismo, obtido por contração, e o seu determinante são invariantes, enquanto o determinante da matriz de uma métrica depende da base. Esta distinção será desenvolvida na Secção 10.1, em particular na Subsecção 10.1.4.

Parte I

Geometria das curvas e das superfícies em $\mathbb{R}^3$

Capítulo 1

Geometria diferencial das curvas

A geometria diferencial de uma curva pode ser descrita de duas maneiras complementares. Por um lado, uma curva é dada por uma *parametrização*, isto é, por uma aplicação que descreve o movimento de um ponto no espaço. Por outro, interessa-nos a curva enquanto objeto geométrico, independentemente da velocidade com que é percorrida ou da escolha do parâmetro. Esta distinção entre *parametrização* e *geometria* será recorrente ao longo de todo o curso.

Neste capítulo começamos por identificar as quantidades que não dependem da parametrização. A primeira é o comprimento. A parametrização pelo comprimento de arco permitirá depois definir, de forma intrínseca à curva, a curvatura e, no espaço, a torção.

1.1 Curvas parametrizadas e curvas geométricas

1.1.1 Curvas parametrizadas e regularidade

Definição 1.1 (Curva parametrizada). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma *curva parametrizada* de classe C^k , $k \geq 1$, em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto \gamma(t),$$

de classe C^k . O vetor

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$$

é chamado *vetor velocidade* da curva no parâmetro t .

Definição 1.2 (Curva regular). Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é dita *regular* se

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Equivalentemente, γ é uma imersão de dimensão um.

Nota 1.3 (Porquê esta condição?). Esperamos que uma curva regular descreva localmente um arco suave, que possa ser percorrido sem que a parametrização pare. A condição

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0$$

exprime precisamente esta exigência: em cada instante, a parametrização fornece uma direção

de movimento não nula e, portanto, determina diretamente a direção tangente

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Além disso, esta condição é preservada por mudanças regulares de parâmetro e permite, localmente, utilizar uma coordenada ao longo da curva; em particular, conduz naturalmente à parametrização pelo comprimento de arco.

É importante distinguir esta propriedade da geometria da imagem $\gamma(I)$. A condição $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ é uma condição sobre a *parametrização*. Uma imagem pode possuir uma tangente bem definida mesmo quando uma parametrização particular tem velocidade nula, como mostra o exemplo (iii) da Figura 1.1. Inversamente, uma velocidade nula pode estar associada a uma degenerescência mais séria, como no exemplo (ii).

Assim, a regularidade fornece uma classe de parametrizações para a qual a geometria diferencial local — tangente, comprimento de arco, curvatura e, posteriormente, triedro de Frenet — pode ser desenvolvida sem estas degenerescências. A noção geral de imersão será introduzida no capítulo dedicado às variedades diferenciáveis.

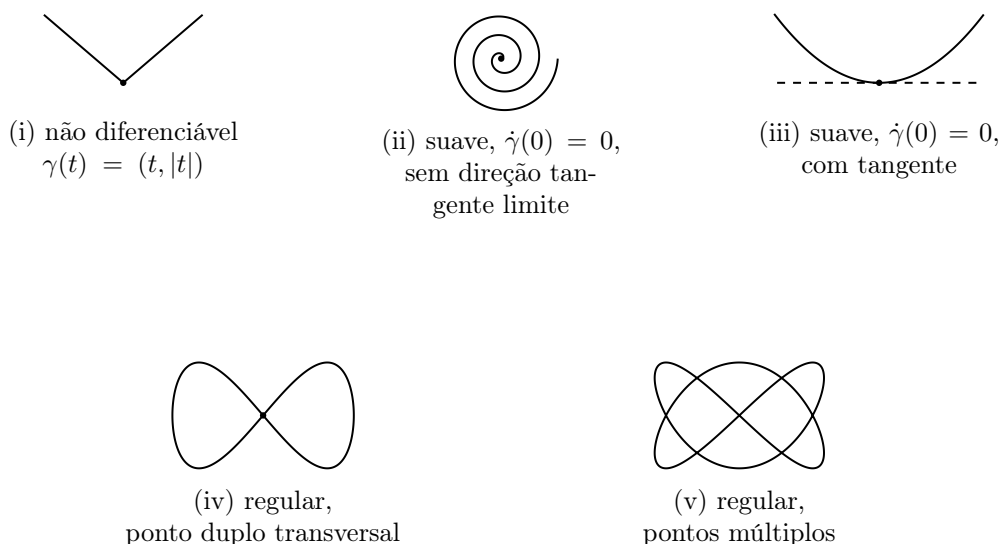


Figura 1.1: Exemplos e contraexemplos que distinguem diferenciabilidade, regularidade e injetividade. Em (ii), um exemplo C^∞ é $\gamma(t) = e^{-1/t^2}(\cos(1/t), \sin(1/t))$ para $t \neq 0$, com $\gamma(0) = 0$: tem-se $\dot{\gamma}(0) = 0$, mas a direção tangente não possui limite. Em (iii), a velocidade também se anula, mas a imagem possui tangente. Em (iv) e (v), a parametrização é regular sem ser injetiva.

Exemplo 1.4 (A velocidade nula não determina, por si só, a geometria). As curvas

$$\gamma_1(t) = (t^2, t^3), \quad \gamma_2(t) = (t^3, 0)$$

têm velocidade nula em $t = 0$. No primeiro caso, a imagem apresenta uma singularidade; no segundo, a imagem é simplesmente uma reta, embora a parametrização não seja regular em 0. Este exemplo mostra por que razão é importante distinguir a aplicação γ da sua imagem.

Nota 1.5. Uma curva regular pode ter auto-interseções. Se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ com $t_1 \neq t_2$, o mesmo ponto da imagem pode corresponder a duas direções tangentes distintas. Portanto, regularidade não implica injetividade.

1.1.2 Curvas geométricas

Definição 1.6 (Curva geométrica regular). Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma *curva geométrica regular* se, para cada $p \in C$, existem uma vizinhança U de p em $\mathbb{R}^n$, uma transformação ortogonal de coordenadas e uma função f de classe C^1 , definida num intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tais que $C \cap U$ é, nessas coordenadas, o gráfico de f .

A definição anterior descreve a curva como um objeto geométrico local. A ligação com as curvas parametrizadas regulares é uma consequência imediata do teorema da função inversa.

Proposição 1.7 (Uma curva regular é localmente geométrica). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular de classe C^1 . Para todo $t_0 \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que a restrição*

$$\gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$$

é injetiva e a sua imagem é uma curva geométrica regular.

Demonstração. Como $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, existe uma componente, digamos γ_j , tal que $\dot{\gamma}_j(t_0) \neq 0$. Pelo teorema da função inversa, após diminuir uma vizinhança de t_0 se necessário, a aplicação $t \mapsto \gamma_j(t)$ é um difeomorfismo sobre um intervalo aberto J . Escrevendo $t = t(x_j)$, as restantes componentes da curva tornam-se funções de x_j :

$$x_i = \gamma_i(t(x_j)), \quad i \neq j.$$

Assim, numa vizinhança de $\gamma(t_0)$, a imagem de γ é o gráfico de uma aplicação de uma variável. A mesma escolha local torna a parametrização injetiva. $\square$

Nota 1.8. A proposição é apenas local. Globalmente, uma curva regular pode ter pontos duplos ou múltiplos e, portanto, a sua imagem pode não ser o gráfico de uma única função. Mais ainda, a imagem $\gamma(I)$, considerada isoladamente, pode perder informação sobre a forma como a curva é percorrida.

1.1.3 Reparametrizações

Definição 1.9 (Reparametrização). Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos e seja $\varphi : J \rightarrow I$ um difeomorfismo. Dada uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, a curva

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é chamada uma *reparametrização* de γ .

Proposição 1.10. *Se γ é regular, toda reparametrização $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ é regular. Além disso, $\varphi' > 0$ preserva a orientação e $\varphi' < 0$ inverte a orientação.*

Demonstração. Pela regra da cadeia,

$$\tilde{\gamma}'(u) = \dot{\gamma}(\varphi(u)) \varphi'(u).$$

Como φ é um difeomorfismo de intervalos, $\varphi'(u) \neq 0$; como γ é regular, $\dot{\gamma}(\varphi(u)) \neq 0$. Logo $\tilde{\gamma}'(u) \neq 0$.

Uma função contínua que nunca se anula num intervalo tem sinal constante. Consequentemente, $\varphi' > 0$ corresponde a uma mudança crescente de parâmetro, enquanto $\varphi' < 0$ corresponde a uma mudança decrescente, isto é, a uma inversão da orientação. $\square$

Nota 1.11 (Invariantes geométricos). Uma quantidade associada a uma curva será chamada *geométrica* quando não depender da escolha de uma parametrização admissível. Procuraremos agora tais quantidades. O comprimento é o primeiro exemplo; a curvatura e a torção serão os seguintes.

1.2 Comprimento e parametrização pelo comprimento de arco

1.2.1 Comprimento

Definição 1.12 (Comprimento de uma curva). Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1 . O seu comprimento é

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

A definição é independente da velocidade com que a curva é percorrida.

Proposição 1.13 (Invariância do comprimento). Se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ é uma reparametrização de γ , então

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ preserva a orientação. Pela regra da cadeia,

$$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\| \varphi'(u),$$

e, pela mudança de variável $t = \varphi(u)$,

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Se φ inverte a orientação, a mesma demonstração aplica-se usando $|\varphi'|$. $\square$

1.2.2 Abscissa curvilínea

Seja agora $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e fixemos $t_0 \in I$. Definimos

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau.$$

A função s mede o comprimento orientado da curva a partir de $\gamma(t_0)$.

Proposição 1.14 (Parametrização pelo comprimento de arco). Para uma curva regular γ , a função s satisfaz

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0.$$

Consequentemente, s é estritamente crescente e define localmente — e, quando considerada sobre todo o seu intervalo imagem, globalmente — uma nova parametrização da curva. Se $t = t(s)$ é

a função inversa e

$$\widehat{\gamma}(s) := \gamma(t(s)),$$

então

$$\|\widehat{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$s'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

A regularidade implica $s'(t) > 0$, logo s é estritamente crescente. Pela regra da cadeia,

$$\widehat{\gamma}'(s) = \dot{\gamma}(t(s)) t'(s).$$

Como

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|},$$

obtemos

$$\widehat{\gamma}'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}, \quad \|\widehat{\gamma}'(s)\| = 1.$$

□

Definição 1.15 (Parâmetro de arco). Uma parametrização $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* — ou *por abscissa curvilínea* — se

$$\|\gamma'(s)\| = 1 \quad \text{para todo } s \in J.$$

Nota 1.16. Para uma parametrização pelo comprimento de arco, o parâmetro e o comprimento percorrido coincidem. Esta normalização elimina a informação puramente cinemática contida na velocidade e permite que as derivadas seguintes descrevam diretamente a geometria da curva. Em particular, se

$$T(s) := \gamma'(s),$$

então $\|T(s)\| = 1$ e, portanto,

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, T \rangle = 2 \langle T, T' \rangle.$$

Logo $T'(s) \perp T(s)$. Esta observação será o ponto de partida para a definição da curvatura.

Nota bibliográfica

Para a teoria clássica local das curvas, incluindo parametrização pelo comprimento de arco, curvatura e triedro de Frenet, serão usadas como referências de base as exposições clássicas de M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, e de B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*. As notas bibliográficas mais específicas serão acrescentadas nas secções correspondentes aos teoremas de Frenet–Serret, Whitney–Graustein e Hopf.

1.3 Curvas planas e curvatura

Seja $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos o vetor tangente unitário

$$T(s) := \gamma'(s).$$

Como $\|T\| = 1$, temos $T' \perp T$. A orientação do plano permite escolher a normal de modo canónico.

Definição 1.17 (Normal orientada e curvatura algébrica). Escrevendo $T = (T_1, T_2)$, definimos

$$N := (-T_2, T_1).$$

A *curvatura algébrica* (ou curvatura orientada) κ é a função caracterizada por

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Equivalentemente,

$$\kappa(s) = \det(T(s), T'(s)) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)).$$

Nota 1.18. O sinal de κ contém informação de orientação: $\kappa > 0$ quando a tangente gira localmente no sentido positivo do plano e $\kappa < 0$ quando gira no sentido oposto. O módulo $|\kappa|$ é independente da orientação escolhida.

Proposição 1.19 (Curvatura numa parametrização arbitrária). *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^2 . Então a curvatura algébrica é dada por*

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

Esta quantidade é invariante por reparametrizações que preservam a orientação; uma reparametrização que inverte a orientação muda o sinal de κ . Consequentemente, $|\kappa|$ é invariante por qualquer reparametrização.

Demonstração. Se $s = s(t)$ é o comprimento de arco e $\hat{\gamma}(s)$ a parametrização unitária correspondente, então

$$\dot{\gamma} = \hat{\gamma}' \dot{s}, \quad \ddot{\gamma} = \hat{\gamma}'' \dot{s}^2 + \hat{\gamma}' \ddot{s}.$$

Pela multilinearidade e alternância do determinante,

$$\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \dot{s}^3 \det(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}'').$$

Se a orientação é preservada, $\dot{s} = \|\dot{\gamma}\| > 0$, e obtemos a fórmula. Para uma mudança de parâmetro decrescente aparece o fator $\text{sgn}(\dot{s})$, o que explica a mudança de sinal da curvatura algébrica. $\square$

Decomposição tangencial e normal da aceleração.

A fórmula da curvatura admite uma interpretação cinemática útil. Seja agora t um parâmetro qualquer e ponhamos

$$c(t) := \|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{ds}{dt}, \quad T(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{c(t)}.$$

Proposição 1.20 (Decomposição da aceleração). *Para uma curva plana regular de classe C^2 ,*

$$\ddot{\gamma} = \dot{c}T + c^2\kappa N.$$

Portanto a aceleração decompõe-se numa componente tangencial e numa componente normal,

$$a_T = \dot{c}T, \quad a_N = c^2\kappa N.$$

Se $\kappa \neq 0$ e $R := 1/|\kappa|$ é o raio de curvatura, então

$$\|a_N\| = \frac{c^2}{R}.$$

Demonstração. Como $\dot{\gamma} = cT$, derivando em relação a t obtemos

$$\ddot{\gamma} = \dot{c}T + c\dot{T}.$$

Por outro lado,

$$\dot{T} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa N c,$$

e a fórmula segue imediatamente. $\square$

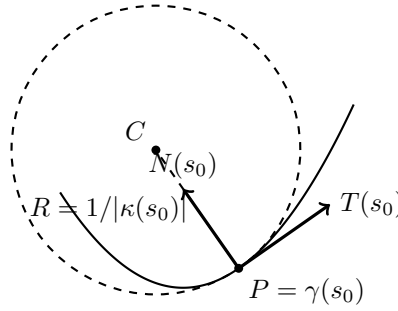


Figura 1.2: Círculo osculador no ponto $P = \gamma(s_0)$. O centro C pertence à normal principal, $|CP| = 1/|\kappa(s_0)|$, e o círculo osculador tem em P a mesma tangente que a curva.

Nota 1.21 (Interpretação mecânica). A componente tangencial a_T altera o módulo da velocidade, enquanto a componente normal a_N altera a sua direção. Em particular,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} mc^2 = m\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = m\dot{c}\dot{c}.$$

Assim, a componente normal não realiza trabalho instantâneo. Esta observação cinemática reaparecerá mais tarde, sob outra forma, no estudo das geodésicas.

1.4 Curvas no espaço e triedro de Frenet–Serret

Seja $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^3 parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos

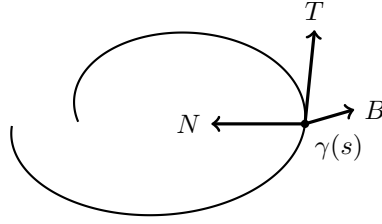
$$T := \gamma', \quad \kappa := \|T'\| = \|\gamma''\|.$$

Nos pontos em que $\kappa > 0$, podemos definir a normal principal e a binormal.

Definição 1.22 (Triedro de Frenet–Serret). Num intervalo onde $\kappa > 0$, definimos

$$N := \frac{T'}{\kappa}, \quad B := T \times N.$$

A base ortonormada positivamente orientada (T, N, B) é chamada *triedro de Frenet–Serret* da curva.



as direções desenhadas são as projeções do triedro de Frenet da hélice no ponto assinalado

Figura 1.3: Triedro móvel de Frenet–Serret. A direção T é tangente à curva no ponto assinalado; N é a normal principal e $B = T \times N$.

Definição 1.23 (Torção). A *torção* τ é definida pela identidade

$$B' = -\tau N.$$

A definição é possível porque $B' \perp B$ e $B' \perp T$, pelo que B' é colinear com N .

Teorema 1.24 (Fórmulas de Frenet–Serret). Num intervalo onde $\kappa > 0$, o triedro de Frenet–Serret satisfaz

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

Demonstração. A primeira identidade é a definição de N . A terceira é a definição de τ . Para a segunda, derivamos $N \cdot N = 1$, obtendo $N' \cdot N = 0$; portanto N' pertence ao plano gerado por T e B . Além disso,

$$N' \cdot T = -N \cdot T' = -\kappa,$$

e, derivando $N \cdot B = 0$,

$$N' \cdot B = -N \cdot B' = \tau.$$

Logo $N' = -\kappa T + \tau B$. □

1.4.1 Vetor de Darboux e forma matricial

Definição 1.25 (Vetor de Darboux). Define-se o vetor de Darboux do triedro de Frenet por

$$\omega := \tau T + \kappa B.$$

Então

$$T' = \omega \times T, \quad N' = \omega \times N, \quad B' = \omega \times B.$$

Se colocarmos os vetores do triedro nas linhas da matriz

$$F := \begin{pmatrix} T^T \\ N^T \\ B^T \end{pmatrix},$$

as fórmulas de Frenet-Serret escrevem-se

$$F' = \Omega F, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz Ω é anti-simétrica. Esta observação será central na prova do teorema fundamental das curvas.

1.4.2 Fórmulas numa parametrização arbitrária

Proposição 1.26. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^3 e suponhamos*

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0.$$

Então

$$T = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \quad B = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}, \quad N = B \times T,$$

e

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}')}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}.$$

Em particular, κ e τ não dependem de uma reparametrização que preserve a orientação da curva.

Demonstração. A fórmula para κ resulta de

$$T' = \frac{dT}{ds}, \quad \frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}\|,$$

e da eliminação das componentes paralelas a $\dot{\gamma}$ no produto vetorial. Mais precisamente,

$$\|T'\| = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}.$$

Para a torção, usando a parametrização por arco,

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \det(T, \kappa N, -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B) = \kappa^2 \tau.$$

Como $\|\gamma' \times \gamma''\|^2 = \kappa^2$, obtemos a fórmula em parâmetro de arco. Sob uma mudança regular de parâmetro, os termos adicionais em $\ddot{\gamma}$ e $\ddot{\gamma}'$ são combinações das derivadas de ordem inferior e desaparecem no determinante; os fatores restantes cancelam-se com os do denominador. $\square$

Nota 1.27 (Pontos de curvatura nula). A condição $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = 0$ num ponto significa que a curvatura se anula nesse ponto; não permite concluir, por si só, que a curva seja localmente uma reta. Se $\kappa \equiv 0$ num intervalo, então $T' \equiv 0$ nesse intervalo e a curva é aí um segmento de reta. Nos pontos isolados onde $\kappa = 0$, o triedro de Frenet pode deixar de estar definido.

Nota histórica

O triedro móvel associado a uma curva espacial é tradicionalmente ligado aos nomes de Jean Frédéric Frenet e Joseph-Alfred Serret. Frenet apresentou esta construção na sua tese de 1847 e publicou posteriormente a parte relativa às curvas de dupla curvatura; Serret publicou em 1851 uma formulação completa das equações. A história é, contudo, mais antiga: trabalhos de Bartels e do seu aluno Senff já continham uma forma do método dos triedros móveis. A designação

“fórmulas de Frenet–Serret” refere-se hoje ao sistema acima.

1.5 Teorema fundamental das curvas

A curvatura e a torção constituem invariantes que, sob a hipótese $\kappa > 0$, constituem um sistema completo de invariantes locais para curvas espaciais, a menos de movimentos rígidos.

Teorema 1.28 (Teorema fundamental das curvas espaciais). *Sejam $\kappa : [0, L] \rightarrow (0, +\infty)$ e $\tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ funções suficientemente regulares. Então existe uma curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura e torção são, respetivamente, κ e τ . Além disso, quaisquer duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco com as mesmas funções κ e τ diferem por um movimento rígido direto de $\mathbb{R}^3$. Assim, κ e τ determinam a curva a menos da sua posição e orientação no espaço.*

Demonstração. Definimos

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixemos um triedro ortonormado positivamente orientado $F_0 \in SO(3)$ e consideremos o problema de Cauchy

$$F' = \Omega F, \quad F(0) = F_0.$$

A teoria elementar dos sistemas lineares de EDO garante existência e unicidade de F . Como $\Omega^T = -\Omega$,

$$\frac{d}{ds}(F^T F) = F^T(\Omega^T + \Omega)F = 0.$$

Logo $F^T F = I$. Por continuidade, $\det F = 1$, e portanto $F(s) \in SO(3)$ para todo s . Escrevamos as linhas de F como T^T, N^T, B^T . O sistema $F' = \Omega F$ é precisamente o sistema de Frenet–Serret.

Fixado $p_0 \in \mathbb{R}^3$, definimos

$$\gamma(s) := p_0 + \int_0^s T(r) dr.$$

Então $\gamma' = T$, logo $\|\gamma'\| = 1$, e as equações de Frenet mostram que a curvatura e a torção de γ são κ e τ .

Para a unicidade, sejam γ_1, γ_2 duas curvas com os mesmos invariantes. Existe um único $Q \in SO(3)$ que envia o triedro inicial de γ_1 no de γ_2 . Pela unicidade do sistema linear, $F_2(s) = QF_1(s)$, com a convenção matricial correspondente. Integrando as tangentes, existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma_2(s) = Q\gamma_1(s) + a.$$

Isto é, as duas curvas diferem por um movimento rígido direto. □

Caso das curvas planas.

No plano, a orientação permite trabalhar com a curvatura algébrica, que pode mudar de sinal. Se

$$T(s) = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)),$$

então

$$T'(s) = \vartheta'(s)(-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)),$$

pelo que

$$\vartheta'(s) = \kappa(s).$$

Consequentemente,

$$\vartheta(s) = \vartheta_0 + \int_0^s \kappa(r) dr$$

e

$$\gamma(s) = p_0 + \int_0^s \begin{pmatrix} \cos \vartheta(r) \\ \sin \vartheta(r) \end{pmatrix} dr.$$

Corolário 1.29 (Teorema fundamental das curvas planas). *Uma função contínua $\kappa : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ determina uma curva plana regular parametrizada pelo comprimento de arco, a menos de um movimento rígido direto do plano.*

Nota 1.30. No caso plano não é necessário impor $\kappa > 0$: a curvatura algébrica conserva a informação sobre o sentido de rotação da tangente. Esta diferença entre a curvatura orientada no plano e a curvatura não negativa de uma curva espacial será importante na secção dedicada ao número de rotação de curvas fechadas.

Nota bibliográfica

Para uma exposição moderna do teorema fundamental das curvas e das fórmulas de Frenet–Serret, ver M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, e B. O’Neill, *Elementary Differential Geometry*. Para a perspectiva histórica, a tese de Frenet (1847) e o artigo de Serret, *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure* (1851), são referências primárias naturais. A literatura histórica assinala ainda antecedentes no método do triedro móvel anteriores à publicação de Frenet.

1.6 Curvas planas fechadas: grau e índice de rotação

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular fechada, parametrizada pelo comprimento de arco e com orientação fixada. Escrevendo

$$T(s) = \gamma'(s) = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)),$$

temos, como vimos,

$$\vartheta'(s) = \kappa(s).$$

Como $T(L) = T(0)$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi m.$$

Definição 1.31 (Curvatura total algébrica e índice de rotação). A *curvatura total algébrica* de γ é

$$K_\gamma := \int_0^L \kappa(s) ds.$$

O inteiro

$$i_\gamma := \frac{1}{2\pi} K_\gamma \in \mathbb{Z}$$

é chamado *índice de rotação* (ou número de rotação) de γ .

Nota 1.32. O índice de rotação mede o número algébrico de voltas efetuadas pelo vetor tangente quando se percorre uma vez a curva. Não deve ser confundido com o índice de um ponto relativamente à curva, definido mais adiante.

1.6.1 Grau de uma aplicação $S^1 \rightarrow S^1$

Identificamos S^1 com os números complexos de módulo um e consideramos o revestimento

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad u \longmapsto e^{iu}.$$

Se $f : S^1 \rightarrow S^1$ é contínua, uma aplicação contínua $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(e^{iu}) = e^{i\tilde{f}(u)}$$

é chamada um *levantamento* de $f \circ \exp$.

Proposição 1.33 (Grau). *Para todo levantamento $\tilde{f}$ existe um único inteiro d tal que*

$$\tilde{f}(u + 2\pi) = \tilde{f}(u) + 2\pi d.$$

Este inteiro não depende da escolha do levantamento e chama-se grau de f :

$$\deg f = d.$$

Demonstração. A diferença $\tilde{f}(u + 2\pi) - \tilde{f}(u)$ pertence a $2\pi\mathbb{Z}$ para todo u . Sendo contínua e tomando valores num conjunto discreto, é constante. Dois levantamentos diferem por um múltiplo constante de 2π , pelo que o inteiro obtido é independente do levantamento. $\square$

Aplicando esta construção à aplicação tangente unitária

$$T : S^1 \longrightarrow S^1, \quad T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|},$$

obtemos

$$i_\gamma = \deg T.$$

Esta formulação mostra que o índice de rotação é um invariante topológico da aplicação tangente.

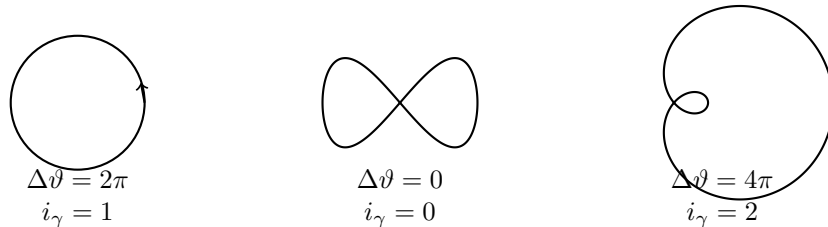


Figura 1.4: Índice de rotação como rotação total da tangente. À direita usa-se $\gamma(t) = e^{2it} + 1.3e^{it}$ (identificando $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$): $\gamma'(t) = ie^{it}(2e^{it} + 1.3)$ nunca se anula e os dois fatores dão uma volta em torno da origem; por isso $\deg T = 2$.

1.6.2 Índice de um ponto relativamente a uma curva

Seja $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)$. Defina-se

$$f_p : S^1 \longrightarrow S^1, \quad f_p(t) = \frac{\gamma(t) - p}{\|\gamma(t) - p\|}.$$

Definição 1.34. O inteiro

$$\text{Ind}_\gamma(p) := \deg f_p$$

é chamado *índice de p relativamente a γ* .

Nota 1.35. A função $p \mapsto \text{Ind}_\gamma(p)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(S^1)$ e vale 0 na componente não limitada. Para uma curva simples fechada, vale ± 1 na componente limitada, com o sinal determinado pela orientação.

1.7 Homotopia regular e teorema de Whitney–Graustein

É essencial distinguir homotopia ordinária de *homotopia regular*.

Definição 1.36 (Homotopia regular). Duas curvas regulares fechadas $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são *regularmente homotópicas* se existe uma aplicação suave

$$H : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $H(\cdot, 0) = \gamma_0$, $H(\cdot, 1) = \gamma_1$ e, para todo $u \in [0, 1]$, a curva $H(\cdot, u)$ é regular e fechada.

Teorema 1.37 (Whitney–Graustein). *Duas curvas regulares fechadas no plano são regularmente homotópicas se e somente se têm o mesmo índice de rotação.*

Primeira implicação. Numa homotopia regular, a aplicação tangente unitária depende continuamente do parâmetro da homotopia. O seu grau é inteiro e varia continuamente; é portanto constante. Assim, curvas regularmente homotópicas têm o mesmo índice de rotação. $\square$

Nota 1.38. A recíproca constitui a parte mais profunda do teorema. Não apresentaremos aqui a sua demonstração. Assim, o teorema de Whitney–Graustein estabelece que o índice de rotação é um invariante completo das curvas planas regulares fechadas a menos de homotopia regular. Para uma demonstração completa, veja-se Whitney (1937).

Para além de Whitney: curvas genéricas e invariantes de Arnold.

O índice de rotação classifica as imersões fechadas a menos de homotopia regular, mas não descreve as modificações locais que ocorrem numa família genérica de curvas imersas. Arnold introduziu três invariantes, J^+ , J^- e St , adaptados às três perestroikas elementares: os dois tipos de auto-tangência e a passagem por um ponto triplo.

Na terminologia de Arnold, uma auto-tangência é *direta* quando os vetores velocidade das duas ramos tangentes apontam no mesmo sentido, e *inversa* quando apontam em sentidos opostos. O invariante J^+ reage às auto-tangências diretas, J^- às auto-tangências inversas, e St às passagens por pontos triplos.

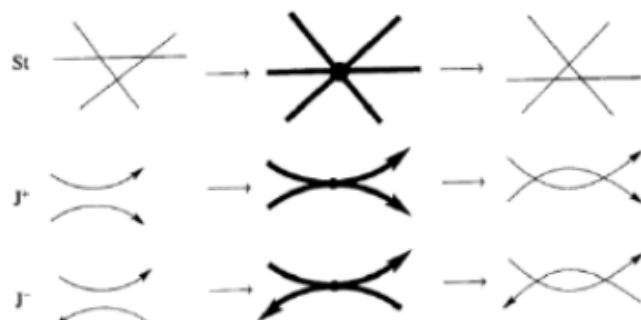


Figura 1.5: As três perestroikas elementares na apresentação usada no curso: passagem por um ponto triplo (St), auto-tangência direta (J^+) e auto-tangência inversa (J^-). As setas nas ramificações distinguem os dois tipos de auto-tangência.

Como ler o diagrama de Gauss–Arnold

O teorema de Whitney–Graustein mostra que o índice de rotação i_γ classifica as curvas planas regulares fechadas a menos de homotopia regular. Contudo, este inteiro não descreve a configuração das auto-interseções de uma curva genérica. Duas curvas com o mesmo índice de rotação podem ter o mesmo número de pontos duplos e, ainda assim, apresentar organizações muito diferentes desses pontos.

Para uma curva genérica, cada ponto duplo transversal possui duas pré-imagens no círculo parâmetro S^1 . Marcando estas pré-imagens sobre um círculo e ligando por uma corda os dois pontos que correspondem à mesma auto-interseção, obtém-se o *diagrama de Gauss*. Assim, uma curva com quatro pontos duplos dá origem a quatro cordas. A disposição e o entrelaçamento dessas cordas registam informação combinatória que não é determinada pelo simples número de pontos duplos nem pelo índice de rotação.

O diagrama da Figura 1.6 organiza exemplos de curvas planas genéricas e indica, para cada uma, o índice de rotação e os valores dos invariantes de Arnold. Ao deformar genericamente uma curva, as mudanças singulares elementares ocorrem quando se atravessa uma auto-tangência ou um ponto triplo. Arnold associa a estes fenômenos três invariantes de ordem um: J^+ , ligado às auto-tangências diretas, J^- , ligado às auto-tangências inversas, e St , ligado às passagens por pontos triplos. Estes invariantes refinam, portanto, a informação fornecida por i_γ : o índice determina a classe de homotopia regular, enquanto J^+ , J^- e St distinguem fenômenos mais finos na geometria das curvas genéricas. Para a construção e a classificação originais, veja-se Arnold (1994).

Para curvas simples fechadas não há auto-interseções deste tipo. Voltamos então ao índice de rotação, cuja forte restrição no caso simples é dada pelo teorema das tangentes girantes de Hopf.

1.8 Teorema das tangentes girantes de Hopf

Para uma curva fechada regular qualquer sabemos apenas que $i_\gamma \in \mathbb{Z}$. A hipótese de simplicidade impõe uma restrição muito mais forte.

Teorema 1.39 (Hopf–Umlaufsatz). *Se $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva plana regular, simples e fechada, então*

$$i_\gamma = \pm 1,$$

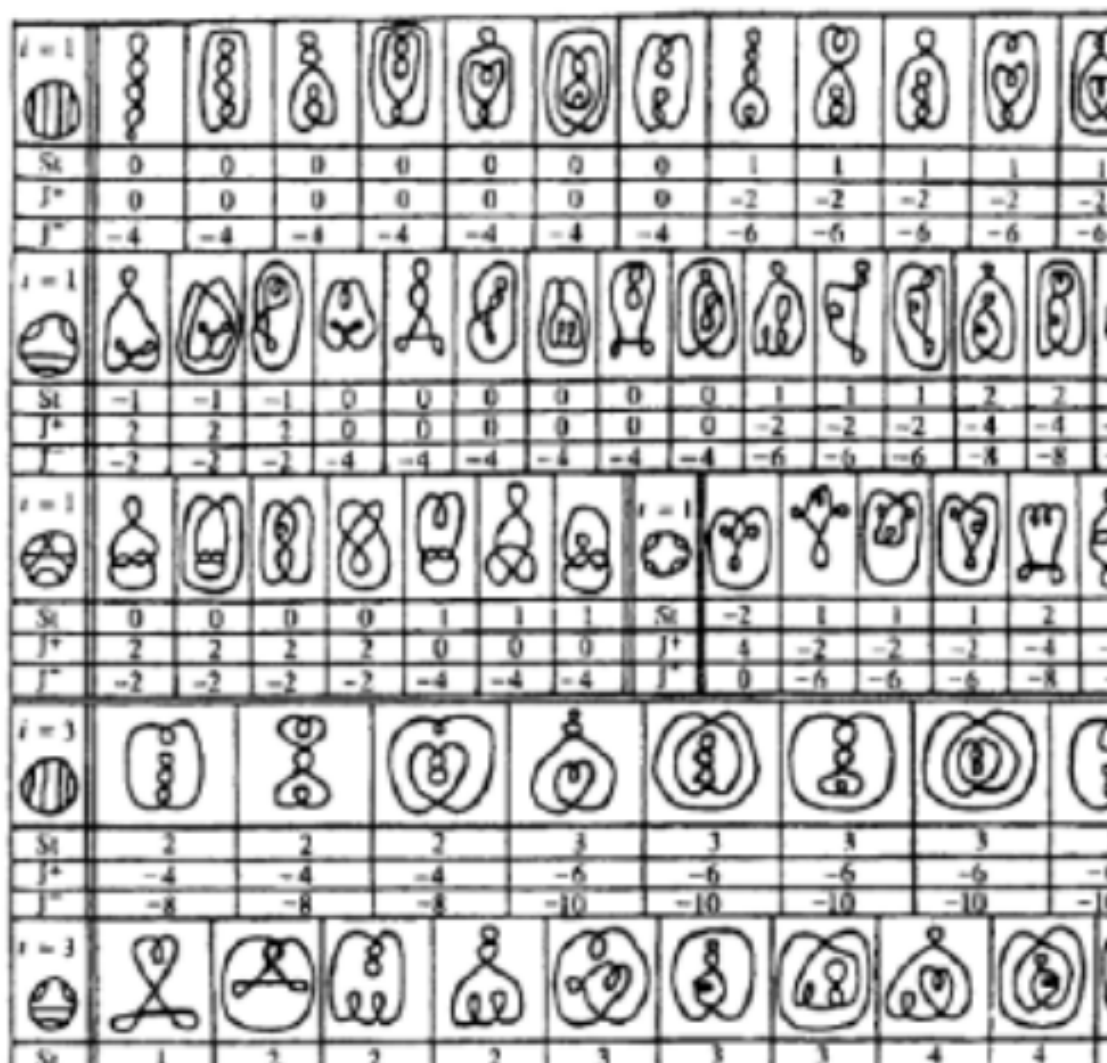


Figura 1.6: Diagrama de Gauss-Arnold para curvas planas genéricas com quatro pontos duplos, reproduzido do material gráfico utilizado no curso. As linhas associadas a cada curva registam os invariantes de Arnold.

ou, equivalentemente,

$$\int_{\gamma} \kappa ds = \pm 2\pi.$$

O sinal é determinado pela orientação da curva.

Demonstração do teorema de Hopf. Para demonstrar o teorema, introduzimos primeiro a aplicação das direções das cordas. Parametrizemos γ em $[0, 1]$, com $\gamma(0) = \gamma(1)$. No triângulo

$$\Delta := \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$$

consideramos a direção orientada da corda

$$h(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|}, \quad t_1 < t_2,$$

com as extensões contínuas

$$h(t, t) = T(t), \quad h(0, 1) = -T(0).$$

A simplicidade da curva garante que a expressão das cordas está bem definida fora destes casos limite.

Como Δ é convexo, logo simplesmente conexo, h admite um levantamento contínuo

$$\Theta : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h = e^{i\Theta}.$$

Sobre a diagonal, $\Theta(t, t)$ é portanto um levantamento contínuo do ângulo da tangente.

Escolhemos o ponto inicial e os eixos de modo que $\gamma(0)$ seja um ponto de suporte à direita da curva e $T(0)$ seja vertical. Podemos tomar

$$\Theta(0, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ao longo do lado $t_1 = 0$, a direção da corda não pode atravessar a direção horizontal positiva: tal atravessamento colocaria um ponto da curva à direita da reta de suporte. Como $h(0, 1) = -T(0)$, a continuidade do levantamento dá

$$\Theta(0, 1) - \Theta(0, 0) = \pi.$$

Analogamente, ao longo do lado $t_2 = 1$, a direção da corda não pode atravessar a direção horizontal negativa, e obtemos

$$\Theta(1, 1) - \Theta(0, 1) = \pi.$$

Consequentemente,

$$2\pi i_{\gamma} = \Theta(1, 1) - \Theta(0, 0) = 2\pi.$$

Para a orientação oposta obtém-se -2π . Logo $i_{\gamma} = \pm 1$. □

Nota 1.40. Esta demonstração torna explícita a passagem entre geometria e topologia: a curvatura controla a rotação infinitesimal da tangente, enquanto o levantamento da aplicação de direções permite medir globalmente essa rotação.

1.9 Curvas regulares por partes e funções de variação limitada

O teorema de Hopf possui uma extensão natural às curvas regulares por partes. Neste caso, o ângulo da tangente é suave em cada arco regular, mas pode sofrer saltos nos vértices. É precisamente esta situação que motiva a introdução de funções de variação limitada.

1.9.1 Variação total

Definição 1.41 (Função de variação limitada). Seja $\vartheta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. A sua *variação total* é

$$\text{Var}(\vartheta; [0, L]) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=0}^{N-1} |\vartheta(t_{j+1}) - \vartheta(t_j)|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições

$$\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = L.$$

Dizemos que ϑ é de *variação limitada*, e escrevemos $\vartheta \in BV([0, L])$, se esta quantidade é finita.

Proposição 1.42 (Propriedades elementares). *Uma função de variação limitada possui limites laterais em todos os pontos interiores e tem no máximo um conjunto numerável de descontinuidades. Além disso, toda função monótona num intervalo limitado pertence a BV .*

Teorema 1.43 (Decomposição de Jordan). *Uma função real ϑ pertence a $BV([0, L])$ se e somente se pode ser escrita como diferença de duas funções crescentes:*

$$\vartheta = \vartheta^+ - \vartheta^-.$$

1.9.2 Funções C^1 por partes

Suponhamos agora que ϑ é C^1 nos intervalos (τ_j, τ_{j+1}) e possui apenas um número finito de saltos. Denotamos

$$[\vartheta]_j := \vartheta(\tau_j^+) - \vartheta(\tau_j^-).$$

Neste caso, a variação total separa-se numa contribuição contínua e numa contribuição concentrada nos saltos:

$$\text{Var}(\vartheta; [0, L]) = \sum_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\vartheta'(t)| dt + \sum_j |[\vartheta]_j|.$$

Equivalentemente, pode-se aproximar ϑ por funções suaves ϑ_k de modo que

$$\int_0^L |\vartheta'_k(t)| dt \longrightarrow \sum_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\vartheta'(t)| dt + \sum_j |[\vartheta]_j|.$$

Nota 1.44 (Interpretação geométrica). Para o ângulo da tangente de uma curva regular por partes, o primeiro termo mede a rotação acumulada ao longo dos arcos suaves; os saltos representam as rotações instantâneas nos vértices. Assim, a passagem ao quadro BV constitui uma digressão analítica: ela permite tratar numa única linguagem a curvatura *difusa* nos arcos e a curvatura *concentrada* nos vértices.

1.9.3 Umlaufsatz generalizado

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, simples, fechada e regular por partes, com vértices $\gamma(\tau_j)$. Em cada arco regular escolhamos um levantamento contínuo ϑ_j do ângulo da tangente. Seja α_j o ângulo exterior orientado no vértice $\gamma(\tau_j)$, isto é, o salto do ângulo da tangente escolhido no intervalo $(-\pi, \pi]$ de acordo com a orientação local.

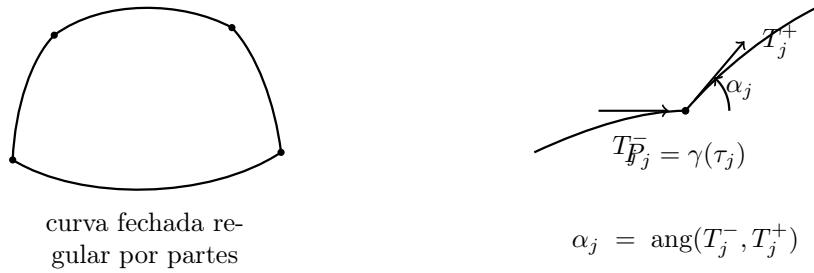


Figura 1.7: Curva regular por partes e salto da direção tangente num vértice. A curva é a união de um número finito de arcos suaves e regulares. No vértice $P_j = \gamma(\tau_j)$, as tangentes laterais T_j^- e T_j^+ podem ser distintas; o ângulo orientado α_j mede o salto da direção tangente.

Teorema 1.45 (Teorema das tangentes girantes, versão por partes). *Com as hipóteses anteriores,*

$$\sum_j (\vartheta_j(\tau_{j+1}^-) - \vartheta_j(\tau_j^+)) + \sum_j \alpha_j = \pm 2\pi.$$

Se cada arco está parametrizado pelo comprimento de arco, então

$$\sum_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \kappa(s) ds + \sum_j \alpha_j = \pm 2\pi.$$

Ideia da demonstração. O ângulo global da tangente, entendido com os seus saltos, é uma função BV . Regularizam-se os vértices de modo a obter curvas simples fechadas suaves; a variação angular produzida em torno de cada vértice converge para o respetivo ângulo exterior α_j . Para cada curva regularizada, o teorema de Hopf dá uma rotação total igual a $\pm 2\pi$. Passando ao limite e usando a decomposição da variação angular em parte suave e saltos, obtém-se a fórmula acima. $\square$

Nota 1.46. A fórmula anterior antecipa a estrutura do teorema de Gauss–Bonnet para regiões com fronteira regular por partes: integrais de curvatura ao longo dos arcos aparecem juntamente com contribuições angulares nos vértices.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

Para a teoria clássica das curvas euclidianas, incluindo curvatura, torção, triedro de Frenet–Serret e o teorema fundamental das curvas, adotamos como referências gerais M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, e M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Em particular, Umehara–Yamada constitui uma referência especialmente rica para a teoria clássica e global das curvas. Para uma apresentação clássica em língua francesa, veja-se Y. Choquet–Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*; para uma abordagem particularmente geométrica e visual das curvas planas, veja-se M. Berger, *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*.

O resultado hoje conhecido como teorema de Whitney–Graustein classifica as curvas regulares fechadas do plano a menos de homotopia regular pelo índice de rotação. A referência clássica é H. Whitney, “On regular closed curves in the plane”, *Compositio Mathematica* **4** (1937), 276–284.

Para o teorema das tangentes girantes, a referência histórica utilizada na literatura moderna é H. Hopf, “Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven”, *Compositio Mathematica* **2** (1935), 50–62. A versão para curvas simples fechadas regulares por partes, com a soma dos ângulos exteriores, é também a forma que reaparecerá naturalmente no teorema de Gauss–Bonnet. Para o levantamento de aplicações $S^1 \rightarrow S^1$ e a noção de grau, pode consultar-se J. R. Munkres, *Topology*, em particular o lema de levantamento de caminhos correspondente. Como complemento sobre invariantes de curvas planas genéricas, ver V. I. Arnold, “Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications”, *Advances in Soviet Mathematics* **21** (1994), 33–91.

Capítulo 2

Geometria extrínseca das superfícies

Depois do estudo das curvas em $\mathbb{R}^3$, passamos agora a objetos bidimensionais. Uma superfície será inicialmente considerada como um subconjunto regular do espaço euclidiano,

$$S \subset \mathbb{R}^3.$$

Dispomos, portanto, desde o início, da geometria do espaço ambiente: produto escalar, distâncias, vetores normais e derivação em $\mathbb{R}^3$. É neste sentido que o ponto de vista deste capítulo é *extrínseco*.

A primeira questão consiste em precisar o que significa uma superfície ser regular. Tal como para as curvas, não pretendemos apenas descrever um conjunto de pontos: queremos dispor localmente de coordenadas que permitam utilizar o cálculo diferencial.

2.1 Superfícies regulares e parametrizações locais

Definição 2.1 (Superfície regular parametrizada). Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Uma *superfície regular parametrizada* é dada por uma aplicação

$$p : A \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto p(u, v),$$

suave, injetiva, homeomorfismo sobre a sua imagem, e tal que

$$\text{rank } Dp(u, v) = 2 \quad \text{para todo } (u, v) \in A.$$

Equivalentemente,

$$p_u(u, v) \times p_v(u, v) \neq 0.$$

A condição de posto 2 significa que as duas direções coordenadas permanecem independentes depois da parametrização: localmente, a imagem possui efetivamente duas direções independentes e não degenera numa curva ou num ponto.

Definição 2.2 (Superfície regular). Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $P \in S$, existe uma vizinhança $U \subset S$ de P e uma parametrização regular

$$p : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U.$$

O par (A, p) fornece coordenadas locais (u, v) sobre a superfície.

Plano tangente.

Definição 2.3. O plano tangente a S em P é

$$T_P S := \{\dot{\gamma}(0) : \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \gamma(0) = P\}.$$

Proposição 2.4. Se $P = p(u_0, v_0)$, então

$$T_P S = \text{span}\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\}.$$

Demonstração. Se $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$, a regra da cadeia dá

$$\dot{\gamma}(0) = \dot{u}(0)p_u + \dot{v}(0)p_v.$$

Logo $T_P S$ está contido no espaço gerado por p_u, p_v . Reciprocamente, para $a, b \in \mathbb{R}$, a curva $t \mapsto p(u_0 + at, v_0 + bt)$ tem velocidade $ap_u + bp_v$ em $t = 0$. $\square$

2.2 Vetores tangentes como derivações

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $P \in S$ e $V \in T_P S$. Escolhendo uma curva γ em S tal que $\gamma(0) = P$ e $\dot{\gamma}(0) = V$, definimos

$$df_P(V) := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Em coordenadas locais, se $V = ap_u + bp_v$, então

$$df_P(V) = a \partial_u(f \circ p) + b \partial_v(f \circ p),$$

pelo que a definição depende apenas de V , e não da curva escolhida.

Assim, um vetor tangente pode ser visto simultaneamente como vetor geométrico e como operador diferencial:

$$V(f) = df_P(V).$$

Esta interpretação será crucial quando passarmos às variedades diferenciáveis.

2.3 Base móvel, orientação e aplicação de Gauss

Escrevemos

$$g_1 = g_u := p_u, \quad g_2 = g_v := p_v, \quad T_P S = \text{span}\{g_u, g_v\}.$$

Se S é orientável, escolhemos um campo normal unitário suave

$$\nu = \frac{g_u \times g_v}{\|g_u \times g_v\|}.$$

A aplicação

$$\nu : S \longrightarrow S^2$$

é chamada *aplicação de Gauss*. Localmente, $\{g_u, g_v, \nu\}$ constitui uma base móvel de $\mathbb{R}^3$ ao longo da superfície.

2.4 Curvas numa superfície: velocidade e aceleração

Se

$$\gamma(t) = p(w(t)), \quad w(t) = (u(t), v(t)),$$

então

$$\dot{\gamma} = \dot{w}^\alpha g_\alpha.$$

Derivando novamente,

$$\ddot{\gamma} = \ddot{w}^\alpha g_\alpha + \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta \partial_\beta g_\alpha.$$

Como $\{g_1, g_2, \nu\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, escrevemos

$$\partial_\alpha g_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \nu.$$

Daí

$$\ddot{\gamma} = (\ddot{w}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta) g_\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta \nu.$$

Esta fórmula separa a aceleração tangencial da aceleração normal à superfície.

Exemplo: movimento ao longo de um paralelo da esfera.

Para um ponto que percorre com velocidade constante V um paralelo de uma esfera de raio R , a aceleração possui, em geral, uma componente tangente à esfera e uma componente normal. Com a convenção angular usada no curso, obtém-se

$$a_T = \frac{V^2}{R \tan \varphi} n, \quad a_\nu = \frac{V^2}{R} \nu,$$

com os sinais dependentes da orientação escolhida para n e ν . O exemplo mostra que uma curva contida numa superfície pode ter aceleração tangencial mesmo quando a velocidade é sempre tangente à superfície.

2.5 Geodésicas

Definição 2.5 (Geodésica). Uma curva $\gamma(t) = p(w(t))$ é uma *geodésica* se a componente tangencial da sua aceleração é nula. Em coordenadas,

$$\ddot{w}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0, \quad \sigma = 1, 2.$$

Equivalentemente,

$$\ddot{\gamma} \perp T_{\gamma(t)} S.$$

Numa geodésica,

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = 2\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0,$$

pelo que a velocidade tem módulo constante.

Nota 2.6 (Geodésicas e minimização). Uma geodésica não é necessariamente globalmente minimizante entre dois dos seus pontos. Contudo, suficientemente localmente, os segmentos geodésicos apropriados realizam a distância entre pontos próximos. A relação precisa entre geodésicas e minimização do comprimento será estudada mais adiante.

Derivada covariante ao longo de uma curva.

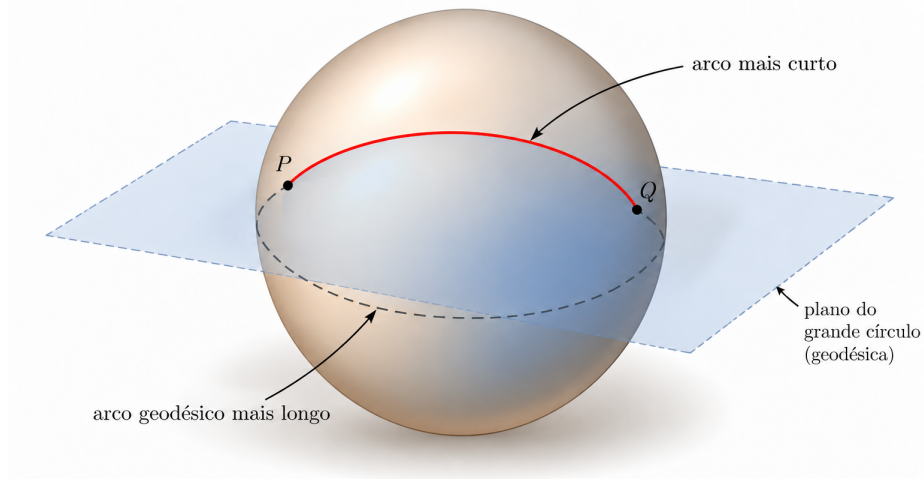


Figura 2.1: Dois arcos da mesma geodésica podem ligar os mesmos pontos de uma esfera. O facto de uma curva ser geodésica não implica que qualquer dos seus arcos seja globalmente minimizante.

Se $c = c^\alpha g_\alpha$ é um campo tangente, definimos

$$\nabla_\beta c = (\partial_\beta c^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma c^\alpha) g_\sigma.$$

Ao longo de γ ,

$$\frac{Dc}{dt} := \nabla_{\dot{\gamma}} c.$$

Assim, a equação geodésica escreve-se

$$\boxed{\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.}$$

Esta notação será retomada e formalizada mais adiante no estudo das conexões.

2.6 Métrica induzida e primeira forma fundamental

A estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^3$ induz sobre S a matriz

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta.$$

Escrevendo

$$E = g_u \cdot g_u, \quad F = g_u \cdot g_v, \quad G = g_v \cdot g_v,$$

a primeira forma fundamental é

$$I_1(a, b) = Ea^1b^1 + F(a^1b^2 + a^2b^1) + Ga^2b^2,$$

e

$$\boxed{ds^2 = I_1[dw] = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.}$$

Para $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$,

$$L(\gamma) = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$

2.7 Isometrias, métricas isotérmicas e comprimento

Definição 2.7. Duas parametrizações $p, \tilde{p} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ são *isométricas* se todas as curvas correspondentes $p \circ w$ e $\tilde{p} \circ w$ têm o mesmo comprimento.

Esta condição equivale à igualdade pontual das métricas,

$$g_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}.$$

De facto, basta testar localmente as direções coordenadas e a direção soma para recuperar E, G e F .

Exemplo 2.8 (Plano e cilindro). No cilindro de raio R , usando $x_1 = R\theta$ e $x_2 = z$,

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2 = dx_1^2 + dx_2^2.$$

Assim, o cilindro é localmente isométrico ao plano, apesar de as duas superfícies terem formas extrínsecas muito diferentes.

Uma métrica é dita *isotérmica* se

$$(g_{\alpha\beta}) = \lambda(u, v)I, \quad ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

e é euclidiana quando $\lambda = 1$.

Lema 2.9. Todas as curvas de $p(A)$ têm o mesmo comprimento que as respectivas pré-imagens em A se e somente se

$$E = G = 1, \quad F = 0.$$

Demonstração. O sentido direto é imediato. Reciprocamente, num ponto fixo, testamos segmentos com direção $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. A igualdade dos comprimentos implica

$$1 = E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha.$$

Tomando $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$ obtemos $E = G = 1$; variando α , segue $F = 0$. □

2.8 Área, ângulos e aplicações conformes

O elemento de área é

$$dS = \|g_u \times g_v\| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{\det g} du dv.$$

Duas superfícies parametrizadas sobre o mesmo domínio são *equiáreas* quando as áreas das regiões correspondentes coincidem; equivalentemente,

$$\det g = \det \tilde{g}.$$

Para $X, Y \in T_P S$, o ângulo χ é determinado por

$$\cos \chi = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)g(Y, Y)}}.$$

Uma aplicação é *conforme* quando preserva ângulos. Em dimensão dois, isto equivale pontualmente a

$$g = \lambda \tilde{g}, \quad \lambda > 0,$$

onde o fator conforme λ pode variar de ponto para ponto.

Lema 2.10. *Se duas superfícies correspondentes são simultaneamente conformes e equiareais, então são isométricas.*

Demonstração. Se $g = \lambda \tilde{g}$, então em dimensão dois $\det g = \lambda^2 \det \tilde{g}$. A igualdade dos elementos de área implica $\lambda = 1$. $\square$

Nota 2.11 (Cartografia). Uma carta plana de uma região da esfera não pode, em geral, preservar simultaneamente ângulos e áreas. A projeção de Mercator é conforme mas distorce áreas; projeções equiareais preservam áreas mas não, em geral, ângulos. A impossibilidade de obter simultaneamente as duas propriedades será explicada geometricamente pelo *Theorema Egregium*.

2.9 Segunda forma fundamental

A componente normal da aceleração de uma curva é

$$a_\nu = (L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2)\nu,$$

onde

$$L = p_{uu} \cdot \nu = -g_u \cdot \nu_u, \quad M = p_{uv} \cdot \nu = -g_u \cdot \nu_v, \quad N = p_{vv} \cdot \nu = -g_v \cdot \nu_v.$$

Definição 2.12 (Segunda forma fundamental). A segunda forma fundamental é a forma bilinear simétrica

$$I_2(a, b) = La^1b^1 + M(a^1b^2 + a^2b^1) + Na^2b^2,$$

ou, quadraticamente,

$$I_2(dw) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = -dp \cdot d\nu.$$

Para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, a *curvatura normal assinada* é

$$\kappa_n = \ddot{\gamma} \cdot \nu = I_2(\gamma', \gamma').$$

O seu módulo é o módulo da componente normal da aceleração.

A segunda forma fundamental mede também o afastamento de segunda ordem relativamente ao plano tangente:

$$(p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)) \cdot \nu = \frac{1}{2}(L\Delta u^2 + 2M\Delta u\Delta v + N\Delta v^2) + o(|\Delta w|^2).$$

Assim,

I_1 mede comprimentos no plano tangente, enquanto I_2 mede o afastamento de segunda ordem do plano tangente.

2.10 Aplicação de Weingarten

Introduzimos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Sob uma mudança de coordenadas de jacobiano J ,

$$\tilde{A} = J^T A J, \quad \tilde{B} = J^T B J.$$

Definimos

$$W = A^{-1}B.$$

Então

$$\widetilde{W} = J^{-1}WJ,$$

pelo que os valores próprios, o traço e o determinante de W são invariantes por mudança de coordenadas.

Teorema 2.13 (Weingarten). *A derivada da normal é tangente à superfície e satisfaz*

$$d\nu = -dpW.$$

Equivalentemente,

$$(\nu_u \mid \nu_v) = -(g_u \mid g_v)W.$$

Demonstração. De $\nu \cdot \nu = 1$ segue $\partial_\alpha \nu \cdot \nu = 0$, logo $\partial_\alpha \nu$ é tangente. Escrevendo

$$\partial_\alpha \nu = -W^\beta_{\alpha} g_\beta$$

e tomando o produto escalar com g_γ , obtemos

$$-\partial_\alpha \nu \cdot g_\gamma = W^\beta_{\alpha} g_\beta g_\gamma = b_{\alpha\gamma}.$$

Portanto $B = AW$ e $W = A^{-1}B$. □

2.11 Equações de compatibilidade

Temos agora

$$\partial_\alpha g_\beta = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} g_\sigma + b_{\alpha\beta} \nu, \quad \partial_\alpha \nu = -W^\beta_{\alpha} g_\beta.$$

Como os vetores g_α provêm de uma mesma parametrização, as derivadas mistas devem comutar. Isto mostra que I_1 e I_2 não podem ser prescritas arbitrariamente.

Nota 2.14 (Problema de compatibilidade). Se prescrevermos duas formas quadráticas I_1 e I_2 , existe uma superfície de $\mathbb{R}^3$ que as tenha como primeira e segunda formas fundamentais? Em geral, não: os seus coeficientes devem satisfazer relações diferenciais de compatibilidade.

Reunimos a base móvel numa matriz $\mathcal{F}$ e escrevemos

$$\partial_u \mathcal{F} = \mathcal{F} \Omega, \quad \partial_v \mathcal{F} = \mathcal{F} \Lambda.$$

A identidade $\partial_{uv} \mathcal{F} = \partial_{vu} \mathcal{F}$ conduz a

$$\partial_v \Omega - \partial_u \Lambda + \Lambda \Omega - \Omega \Lambda = 0.$$

Esta única identidade matricial contém as equações de Gauss e de Codazzi–Mainardi.

2.11.1 Equações de Codazzi–Mainardi

Nas coordenadas (u, v) , as duas equações escrevem-se

$$\partial_v L - \partial_u M = L\Gamma^u_{vu} + M(\Gamma^v_{vu} - \Gamma^u_{uu}) - N\Gamma^v_{uu},$$

$$\partial_v M - \partial_u N = L\Gamma^u_{vv} + M(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) - N\Gamma^v_{uv}.$$

De forma tensorial,

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} = \nabla_\beta b_{\alpha\gamma}.$$

2.11.2 Sistema matricial de Pfaff

Teorema 2.15 (Sistema de Pfaff). *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ simplesmente conexo e sejam $\Gamma_i \in C^1(U; \mathbb{R}^{n \times n})$ campos matriciais que satisfazem*

$$\partial_i \Gamma_k - \partial_k \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_k - \Gamma_k \Gamma_i = 0.$$

Fixados $x_0 \in U$ e F_0 , existe uma única solução do sistema

$$\partial_i F = F \Gamma_i, \quad F(x_0) = F_0,$$

com a convenção matricial adotada acima.

Localmente, a hipótese de simples conexidade pode ser obtida restringindo-nos a uma vizinhança suficientemente pequena.

2.12 Compatibilidade métrica e conexão de Levi-Civita

Derivando $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta$ e combinando as identidades obtidas por permutação dos índices, encontramos

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}).$$

Em particular, os coeficientes tangenciais da conexão associada à superfície são determinados pela primeira forma fundamental.

Teorema 2.16 (Levi-Civita). *Dada uma métrica g , existe uma única conexão que é simultaneamente compatível com a métrica,*

$$\nabla g = 0,$$

e sem torção. Os seus símbolos de Christoffel são dados pela fórmula anterior.

Nota 2.17 (Torção e tensor de contorção). A compatibilidade com a métrica não implica, por si só, que uma conexão seja simétrica. Uma conexão compatível com g pode possuir torção

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

Mais precisamente, uma conexão métrica pode escrever-se sob a forma

$$\nabla = \nabla^{LC} + K,$$

onde ∇^{LC} é a conexão de Levi-Civita e K é o *tensor de contorção*, determinado pela torção da conexão. A conexão de Levi-Civita corresponde ao caso particular $K = 0$. Com a convenção

$$K_{ijk} = g((\nabla - \nabla^{LC})_{e_i} e_j, e_k), \quad T_{ijk} = g(T(e_i, e_j), e_k),$$

a compatibilidade métrica implica $K_{ijk} = -K_{ikj}$ e vale

$$K_{ijk} = \frac{1}{2} (T_{ijk} - T_{jki} + T_{kij}).$$

2.13 Teorema fundamental das superfícies

As relações anteriores permitem inverter o problema: em vez de começar por uma superfície e calcular I_1 e I_2 , perguntamos quando duas formas dadas provêm de uma superfície.

Teorema 2.18 (Teorema fundamental das superfícies). *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Suponhamos dados*

$$I_1 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

com I_1 definida positiva, e

$$I_2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

com regularidade suficiente. Se I_1 e I_2 satisfazem as equações de Gauss–Codazzi–Mainardi, então existe uma imersão

$$p : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

cujas primeira e segunda formas fundamentais são precisamente I_1 e I_2 .

Demonstração. A demonstração segue a reconstrução em cinco etapas.

Etapla 1: construção do referencial móvel. Fixemos $x_0 \in U$. Como a matriz

$$A(x_0) = (g_{\alpha\beta}(x_0))_{\alpha,\beta=1,2}$$

é simétrica definida positiva, podemos escolher vetores $g_1^0, g_2^0 \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$g_{\alpha\beta}(x_0) = g_\alpha^0 \cdot g_\beta^0, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}.$$

Por exemplo, estes vetores podem ser obtidos a partir de uma raiz quadrada da matriz $A(x_0)$. Definimos

$$g_\alpha(x_0) = g_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2,$$

e escolhemos a orientação inicial por

$$g_3(x_0) = \frac{g_1(x_0) \times g_2(x_0)}{\|g_1(x_0) \times g_2(x_0)\|}.$$

Se $\mathcal{F}$ denota a matriz cujas linhas são g_1, g_2, g_3 , as equações de Gauss–Codazzi–Mainardi são precisamente as condições de compatibilidade do sistema de Pfaff

$$\partial_\gamma \mathcal{F} = \Gamma_\gamma \mathcal{F}, \quad \gamma \in \{1, 2\},$$

com a condição inicial anterior. Pelo teorema de Pfaff existe, portanto, uma única solução $\mathcal{F}$ de classe C^2 .

Etapla 2: reconstrução da parametrização. Se $g_i = \mathcal{F}_{i\bullet}$ é a i -ésima linha de $\mathcal{F}$, a linha α da equação $\partial_\beta \mathcal{F} = \Gamma_\beta \mathcal{F}$ dá

$$\partial_\beta g_\alpha = \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_\sigma + b_{\beta\alpha} g_3 = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k. \quad (\text{N})$$

A simetria da conexão tangencial e de $B = (b_{\alpha\beta})$ implica

$$\partial_\beta g_\alpha = \partial_\alpha g_\beta.$$

Aplicando o lema de Poincaré a cada componente, existem funções $p^i \in C^3(U)$, $i = 1, 2, 3$, tais que

$$g_\gamma^i = \partial_\gamma p^i.$$

Assim, para $p = (p^1, p^2, p^3)$,

$$\boxed{g_\gamma = \partial_\gamma p, \quad \gamma = 1, 2.}$$

Etapa 3: sistema diferencial para os produtos escalares. Da relação (N) obtemos, para $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$,

$$\partial_\gamma(g_\alpha \cdot g_\beta) = \sum_{m=1}^3 \left(\Gamma_{\gamma\alpha}^m(g_m \cdot g_\beta) + \Gamma_{\gamma\beta}^m(g_m \cdot g_\alpha) \right).$$

Mais geralmente, usando as três linhas do sistema de Pfaff,

$$\boxed{\partial_\gamma(g_i \cdot g_j) = \sum_{m=1}^3 \left(\Gamma_{\gamma i}^m(g_m \cdot g_j) + \Gamma_{\gamma j}^m(g_m \cdot g_i) \right),} \quad (\text{P})$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Etapa 4: identificação da métrica prescrita. Prolongamos a matriz métrica $A = (g_{\alpha\beta})$ a uma matriz 3×3 definindo

$$g_{i3} = g_{3i} = \delta_{i3}.$$

Para $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, a compatibilidade métrica fornece

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^2 \left(\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\sigma\alpha} \right).$$

Verifiquemos que o mesmo sistema vale para os índices que envolvem 3. Como $g_{i3} = \delta_{i3}$, o lado esquerdo é nulo. Por outro lado,

$$\sum_{m=1}^3 \left(\Gamma_{\gamma i}^m g_{m3} + \Gamma_{\gamma 3}^m g_{mi} \right) = \Gamma_{\gamma i}^3 + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{\gamma 3}^m g_{mi}.$$

Usando

$$\Gamma_{\gamma i}^3 = b_{\gamma i}, \quad \Gamma_{\gamma 3}^m = -W^m_\gamma, \quad W = A^{-1}B,$$

o último membro é

$$b_{\gamma i} - \sum_{m=1}^2 g_{im} W^m_\gamma = 0.$$

Logo a matriz prescrita (g_{ij}) satisfaz exatamente o mesmo sistema diferencial que a matriz dos produtos escalares $(g_i \cdot g_j)$ em (P), e ambas têm os mesmos dados iniciais em x_0 . Pela unicidade,

$$\boxed{g_{ij} = g_i \cdot g_j.}$$

Em particular,

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p, \quad g_i \cdot g_3 = \delta_{i3}.$$

Portanto g_1 e g_2 são ortogonais a g_3 , e

$$g_3 = \pm \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}.$$

Resta determinar o sinal.

Etapa 5: imersão, orientação e segunda forma fundamental. Da etapa anterior,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^T = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é definida positiva; conseqüentemente

$$\det(\mathcal{F}\mathcal{F}^T) > 0, \quad \det \mathcal{F}(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in U.$$

Em particular, $(g_{\alpha\beta})$ tem posto 2 e

$$\text{rank } Dp = 2,$$

pelo que p é uma imersão.

No ponto inicial,

$$\det \mathcal{F}(x_0) = (g_1^0 \times g_2^0) \cdot \frac{g_1^0 \times g_2^0}{\|g_1^0 \times g_2^0\|} = \|g_1^0 \times g_2^0\| > 0.$$

Como U é conexo e $\det \mathcal{F}$ é contínuo e nunca se anula, o seu sinal não pode mudar. Assim,

$$\det \mathcal{F} > 0 \quad \text{e} \quad \boxed{g_3 = \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|} = \nu.}$$

Finalmente, tomando o produto escalar de (N) com $g_3 = \nu$, obtemos

$$\boxed{b_{\alpha\beta} = \partial_\beta g_\alpha \cdot g_3 = \partial_\beta \partial_\alpha p \cdot \nu.}$$

Logo a segunda forma fundamental da imersão reconstruída é precisamente I_2 , enquanto a etapa 4 mostrou que a primeira forma fundamental é I_1 . Isto conclui a demonstração. $\square$

A estrutura da demonstração pode ser resumida por

$$\boxed{(I_1, I_2) \xrightarrow{\text{GCM}} \text{sistema de Pfaff} \longrightarrow (g_1, g_2, \nu) \xrightarrow{\text{Poincaré}} p.}$$

Nota 2.19 (Unicidade). Na formulação completa do teorema fundamental, a superfície é determinada por I_1 e I_2 a menos de um movimento rígido direto de $\mathbb{R}^3$, uma vez fixada a orientação da normal.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A teoria local das superfícies regulares desenvolvida neste capítulo pertence ao núcleo clássico da geometria diferencial do século XIX. A primeira forma fundamental codifica a geometria métrica induzida pela imersão, enquanto a segunda forma fundamental e o operador de forma descrevem a variação extrínseca da superfície. A fórmula hoje chamada de Weingarten exprime precisamente a derivada do campo normal em termos de um endomorfismo do plano tangente.

As equações de Gauss e de Codazzi–Mainardi constituem as condições de compatibilidade entre as duas formas fundamentais. A sua interpretação como condição de integrabilidade de um sistema de Pfaff torna transparente a estrutura do teorema fundamental das superfícies: dados métricos e extrínsecos compatíveis permitem reconstruir localmente uma imersão, única a menos de movimento rígido depois de fixados os dados iniciais apropriados.

A conexão determinada pela métrica e pela ausência de torção é a conexão de Levi–Civita. É importante distinguir esta afirmação da mera compatibilidade métrica: uma conexão métrica pode possuir torção, sendo então a diferença relativamente à conexão de Levi–Civita descrita pelo tensor de contorção.

Para o desenvolvimento moderno seguido neste capítulo, a referência principal é M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Podem ainda consultar-se M. P. do

Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, e Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

- M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, Singapore, 2017.
- M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated 2nd ed., Dover, 2016.
- C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

Capítulo 3

Geometria intrínseca das superfícies

Até agora, a geometria de uma superfície foi estudada a partir da sua imersão no espaço euclidiano. Em particular, a segunda forma fundamental e o aplicação de Weingarten dependem da variação do campo normal. A curvatura de Gauss aparece assim, à primeira vista, como uma quantidade extrínseca,

$$K = \det W = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

O resultado fundamental de Gauss mostrará, porém, que K é inteiramente determinado pela primeira forma fundamental. É neste ponto que começa verdadeiramente a geometria intrínseca das superfícies.

3.1 Curvatura normal e curvas assintóticas

Recordemos a fórmula de Meusnier. Seja $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ uma curva de S , parametrizada pela abscissa curvilínea. A sua curvatura normal é

$$\kappa_n = I_2(u', v') = -(u'g_u + v'g_v) \cdot (u'\nu_u + v'\nu_v) = -\gamma' \cdot \nu'.$$

Assim, conhecidas as duas formas fundamentais, a curvatura normal de qualquer curva da superfície fica determinada pela sua direção tangente.

Definição 3.1 (Direção e curva assintótica). Uma direção tangente não nula $X \in T_p S$ é dita *assintótica* se $I_2(X, X) = 0$. Uma curva regular $\gamma \subset S$ é assintótica se a sua direção tangente é assintótica em cada ponto; equivalentemente, a sua aceleração normal é nula.

Secções normais.

Fixemos $p \in S$ e uma direção unitária $X \in T_p S$. O plano

$$\Pi = \text{span}\{X, \nu_p\}$$

é chamado plano normal na direção X . Localmente, a intersecção $S \cap \Pi$ determina uma curva plana, a *secção normal* correspondente.

Lema 3.2 (Curvatura da secção normal). A curvatura normal de uma curva $\gamma \subset S$ em p , com vetor tangente unitário $X = \gamma'(p)$, é igual à curvatura orientada, em p , da secção normal de S pelo plano $\Pi = \text{span}\{X, \nu_p\}$.

Demonstração. Seja $\eta(\tilde{s}) = S \cap \Pi$ a secção normal, parametrizada pela abscissa curvilínea, e escolhamos os parâmetros de modo que

$$\eta(\tilde{s}_0) = \gamma(s_0) = p, \quad \eta'(\tilde{s}_0) = \gamma'(s_0) = X.$$

Como η tem velocidade unitária,

$$\eta' \cdot \eta'' = 0.$$

Além disso, η está contida no plano Π e a sua tangente em p é X ; portanto, no ponto p , o vetor η'' é paralelo a ν_p . Usando $\eta' \cdot \nu = 0$ e derivando,

$$-\eta' \cdot \nu' = \eta'' \cdot \nu.$$

Como $\eta'(\tilde{s}_0) = \gamma'(s_0)$, segue que

$$\kappa_n(s_0) = -\gamma'(s_0) \cdot \nu'(s_0) = -\eta'(\tilde{s}_0) \cdot \nu'(\tilde{s}_0) = \eta''(\tilde{s}_0) \cdot \nu_p.$$

Ora, a aceleração da curva plana unitária η é normal à sua tangente e, no ponto considerado, paralela a ν_p . Logo esta última quantidade é precisamente a curvatura orientada da secção normal. $\square$

3.2 Curvaturas principais, média e de Gauss

Seja $X = \alpha g_u + \beta g_v \neq 0$. A curvatura normal depende apenas da direção de X e é dada pelo quociente das duas formas fundamentais.

Lema 3.3 (Expressão explícita da curvatura normal). *Para $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$,*

$$\kappa_n(\alpha, \beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}.$$

Equivalentemente, escrevendo $(\alpha, \beta) = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$,

$$\kappa_n(\theta) = \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta}.$$

Demonstração. Se s é a abscissa curvilínea, então $I_1[w'] = 1$. Escrevendo $w' = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, obtemos

$$1 = \rho^2 (E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta),$$

enquanto

$$\kappa_n = I_2[w'] = \rho^2 (L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta).$$

Eliminando ρ^2 obtém-se a fórmula. $\square$

Como a função direcional $\theta \mapsto \kappa_n(\theta)$ é contínua no círculo das direções, atinge um mínimo e um máximo.

Definição 3.4 (Curvaturas principais). As curvaturas principais em p são

$$\kappa_m = \min_{X \neq 0} \frac{I_2(X, X)}{I_1(X, X)}, \quad \kappa_M = \max_{X \neq 0} \frac{I_2(X, X)}{I_1(X, X)}.$$

As direções onde estes extremos são atingidos chamam-se *direções principais*.

Definição 3.5 (Curvaturas média e de Gauss). Define-se

$$2H = \kappa_m + \kappa_M, \quad K = \kappa_m \kappa_M.$$

Consequentemente, as curvaturas principais são as raízes de

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto

$$\kappa_{M,m} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

3.3 Caracterização local dos pontos

Definição 3.6. Um ponto $p \in S$ é dito

- *elítico* se $K(p) > 0$;
- *hiperbólico* se $K(p) < 0$;
- *parabólico* se $K(p) = 0$ e $I_2(p) \neq 0$;
- *plano* se $I_2(p) = 0$;
- *umbilical* se $\kappa_m(p) = \kappa_M(p)$.

No cilindro circular todos os pontos são parabólicos. Na esfera todos os pontos são umbilicais. Note-se que a condição de umbilicidade é $\kappa_m = \kappa_M$; em particular, um ponto plano também é umbilical segundo a definição usual.

3.4 Expressão extrínseca das curvaturas principais

Teorema 3.7 (Curvaturas principais e aplicação de Weingarten). *As curvaturas principais são os valores próprios de $W = A^{-1}B$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$2H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \text{tr } W,$$

e

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det I_2}{\det I_1} = \det W.$$

Em particular, as curvaturas principais, H e K são invariantes por mudança de coordenadas.

Demonstração. Escrevamos

$$\kappa_n(\alpha, \beta) = \frac{B(\alpha, \beta)}{A(\alpha, \beta)},$$

onde

$$A = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2, \quad B = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2.$$

Num ponto crítico da função direcional, temos

$$\partial_\alpha B - \kappa_n \partial_\alpha A = 0, \quad \partial_\beta B - \kappa_n \partial_\beta A = 0.$$

Dividindo por 2, isto equivale a

$$\begin{cases} \alpha(L - \kappa_n E) + \beta(M - \kappa_n F) = 0, \\ \alpha(M - \kappa_n F) + \beta(N - \kappa_n G) = 0. \end{cases}$$

Para existir uma solução não trivial (α, β) , é necessário e suficiente que

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa_n E & M - \kappa_n F \\ M - \kappa_n F & N - \kappa_n G \end{pmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante,

$$\boxed{\kappa_n^2(EG - F^2) - \kappa_n(EN + GL - 2FM) + (LN - M^2) = 0.}$$

As duas raízes são precisamente κ_m e κ_M . A soma e o produto das raízes fornecem as fórmulas para $2H$ e K .

Por outro lado,

$$W = A^{-1}B = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

A equação anterior é exatamente a equação característica de W . Assim, as curvaturas principais são os seus valores próprios. Sob uma mudança de coordenadas, W transforma-se por semelhança; os seus valores próprios, traço e determinante permanecem invariantes. $\square$

Como consequência do teorema de Weingarten,

$$\{\nu_u, \nu_v\} \text{ é linearmente dependente } \iff K = \det W = 0.$$

Nota 3.8 (Movimentos rígidos). A curvatura de Gauss é invariante por qualquer movimento rígido de $\mathbb{R}^3$. Para a curvatura média é necessário fixar coerentemente a orientação da normal: sob uma isometria que preserva a orientação escolhida da normal, H é preservada; se a normal for substituída por $-\nu$, então H muda de sinal, enquanto K permanece inalterada.

3.5 O aplicação de Weingarten e as direções principais

Recordemos que o aplicação de Weingarten $W : T_p S \rightarrow T_p S$ satisfaz

$$d\nu = -W dp.$$

Se $X = x^\alpha g_\alpha$ e $Y = y^\alpha g_\alpha$, então

$$I_2(X, Y) = I_1(WX, Y).$$

Consequentemente,

$$g(WX, Y) = g(X, WY),$$

isto é, W é auto-adjunto relativamente à métrica induzida.

Equivalentemente, se γ é uma curva com $\gamma'(0) = X$, a derivada direcional do campo normal satisfaz

$$D_X \nu = \left. \frac{d}{dt} \nu(\gamma(t)) \right|_{t=0} = -WX,$$

e a segunda forma fundamental pode escrever-se como

$$I_2(X, Y) = g(-D_X \nu, Y) = g(WX, Y).$$

Pelo teorema espectral, existe em cada ponto uma base ortonormal de direções principais na qual

$$W = \begin{pmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & \kappa_M \end{pmatrix}.$$

Nas coordenadas correspondentes, $F = M = 0$ e

$$\kappa_m = \frac{L}{E}, \quad \kappa_M = \frac{N}{G},$$

após a ordenação adequada das duas direções.

3.6 Linhas de curvatura

Definição 3.9 (Linha de curvatura). Uma curva regular $\gamma \subset S$ é uma *linha de curvatura* se, em cada ponto, o seu vetor tangente é uma direção principal.

Lema 3.10 (Olinde Rodrigues). Uma curva regular γ é uma linha de curvatura se e somente se

$$\nu' = -k\gamma',$$

onde k é, ao longo da curva, a curvatura principal associada à direção γ' .

Demonstração. Se (u', v') é uma direção principal associada ao valor próprio k , então, pela fórmula de Weingarten,

$$\nu' = (\nu_u \mid \nu_v) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = -(g_u \mid g_v) W \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = -k(g_u \mid g_v) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = -k\gamma'.$$

A recíproca segue da mesma identidade, pois dp tem posto 2. □

A equação diferencial das linhas principais obtém-se de

$$W \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Eliminando k , resulta

$$(-FL + EM)(u')^2 + (-GL + EN)u'v' - (GM - FN)(v')^2 = 0,$$

ou, de forma determinantal,

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix} = 0.$$

3.7 Alguns casos particulares

Lema 3.11. Uma superfície regular compacta admite pelo menos um ponto elítico.

Demonstração. Como S é compacta, está contida numa bola fechada. Considere-se uma bola de raio mínimo R que contém S e um ponto de contacto p entre a esfera limite e S . Comparando localmente as secções normais de S com as da esfera suporte, obtém-se, para uma escolha adequada da orientação, duas curvaturas principais do mesmo sinal e não nulas. Logo $K(p) > 0$. □

Lema 3.12 (Curvaturas principais iguais). *Num ponto umbilical vale $K = H^2$ e $W = \kappa I$. Se $\kappa_m = \kappa_M$ em todos os pontos de uma superfície conexa, então a superfície é localmente uma porção de um plano ou de uma esfera.*

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem imediatamente de $\kappa_m = \kappa_M = \kappa$. Para a última, nas direções principais a fórmula de Weingarten dá

$$\nu_u = -\kappa p_u, \quad \nu_v = -\kappa p_v.$$

Comutando as derivadas mistas de p e de ν ,

$$\kappa_u p_v = \kappa_v p_u.$$

Como p_u, p_v são linearmente independentes, $\kappa_u = \kappa_v = 0$; portanto κ é constante. Se $\kappa = 0$, então $d\nu = 0$ e a superfície é localmente plana. Se $\kappa \neq 0$,

$$d\left(p + \frac{1}{\kappa}\nu\right) = 0,$$

logo existe $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$p + \frac{1}{\kappa}\nu = p_0, \quad \|p - p_0\| = \frac{1}{|\kappa|},$$

e a superfície está contida numa esfera. □

Lema 3.13 (Curvaturas principais constantes e distintas). *Se H e K são constantes e $K \neq H^2$, então, localmente, a superfície é uma porção de um cilindro circular.*

Demonstração. Como H e K são constantes, as duas raízes de $k^2 - 2Hk + K = 0$ são constantes e distintas. Escolhamos coordenadas principais, de modo que

$$\nu_u = -\kappa_1 p_u, \quad \nu_v = -\kappa_2 p_v, \quad \kappa_1 \neq \kappa_2.$$

Comutando derivadas mistas de ν ,

$$-\kappa_1 p_{uv} = -\kappa_2 p_{uv},$$

logo $p_{uv} = 0$ e, localmente,

$$p(u, v) = a(u) + b(v).$$

Como as coordenadas são principais, $a'(u) \cdot b'(v) = 0$ para todos u, v . Se uma das curvaturas, por exemplo κ_1 , é não nula, a direção de b' é constante; portanto b é uma reta. A outra família de curvas coordenadas é plana e tem curvatura constante $|\kappa_1|$, logo é um arco de círculo. Assim S é localmente uma porção de um cilindro circular. □

3.8 Expressão explícita dos símbolos de Christoffel

Para preparar o Teorema Egregium, exprimimos primeiro a conexão apenas em termos da primeira forma fundamental. Recordemos

$$E = g_u \cdot g_u, \quad F = g_u \cdot g_v, \quad G = g_v \cdot g_v.$$

Das decomposições

$$\begin{aligned} \partial_u g_u &= \Gamma_{11}^1 g_u + \Gamma_{11}^2 g_v + Lg_3, \\ \partial_u g_v &= \partial_v g_u = \Gamma_{12}^1 g_u + \Gamma_{12}^2 g_v + Mg_3, \end{aligned}$$

$$\partial_v g_v = \Gamma_{22}^1 g_u + \Gamma_{22}^2 g_v + N g_3,$$

e das derivadas de E, F, G , obtemos

$$\frac{1}{2} E_u = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \quad F_u - \frac{1}{2} E_v = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2,$$

$$\frac{1}{2} E_v = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \quad \frac{1}{2} G_u = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2,$$

$$F_v - \frac{1}{2} G_u = E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \quad \frac{1}{2} G_v = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2.$$

Portanto, se

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix},$$

então

$$\Gamma = \frac{1}{2(EG - F^2)} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

Esta fórmula torna explícito que os símbolos $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ da conexão de Levi-Civita são determinados por E, F, G e pelas suas primeiras derivadas.

3.9 Teorema Egregium de Gauss

Chegamos agora ao resultado que marca a passagem decisiva da geometria extrínseca para a geometria intrínseca.

Teorema 3.14 (Teorema Egregium de Gauss). *A curvatura de Gauss*

$$K = \frac{\det I_2}{\det I_1} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

depende apenas de E, F, G e das suas derivadas tangenciais. Em particular, K é uma quantidade intrínseca: duas superfícies isométricas têm a mesma curvatura de Gauss nos pontos correspondentes.

Nota 3.15. A curvatura média depende, em geral, da realização extrínseca. O plano e o cilindro circular são localmente isométricos e têm ambos $K = 0$, mas possuem curvaturas médias diferentes.

Demonstração. Já exprimimos todas as componentes tangenciais $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, em termos de E, F, G e das suas derivadas. Restam os coeficientes normais

$$L = \Gamma_{11}^3, \quad M = \Gamma_{12}^3, \quad N = \Gamma_{22}^3.$$

Como

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

basta mostrar que $LN - M^2$ também se exprime apenas por dados métricos.

Consideremos $\partial_{uv} g_u \cdot g_v$. Por um lado,

$$\partial_{uv} g_u \cdot g_v = \partial_v (\partial_u g_u \cdot g_v) - \partial_u g_u \cdot \partial_v g_v.$$

Ora,

$$\partial_u g_u \cdot g_v = F_u - \frac{1}{2} E_v,$$

e

$$\partial_u g_u \cdot \partial_v g_v = \Gamma_{22}^1 \frac{E_u}{2} + \Gamma_{22}^2 \left(F_u - \frac{E_v}{2} \right) + LN.$$

Logo

$$\partial_{uv} g_u \cdot g_v = \partial_v \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right) - \Gamma_{22}^1 \frac{E_u}{2} - \Gamma_{22}^2 \left(F_u - \frac{E_v}{2} \right) - LN. \quad (1)$$

Por outro lado, usando $\partial_{uv} g_u = \partial_{vu} g_u$,

$$\partial_{vu} g_u \cdot g_v = \partial_u (\partial_v g_u \cdot g_v) - \partial_v g_u \cdot \partial_u g_v.$$

Como

$$\partial_v g_u \cdot g_v = \frac{1}{2} G_u$$

e $\partial_v g_u = \partial_u g_v$, obtemos

$$\partial_{vu} g_u \cdot g_v = \frac{1}{2} G_{uu} - \|\partial_u g_v\|^2.$$

Decompondo $\partial_u g_v$ na base (g_u, g_v, ν) ,

$$\|\partial_u g_v\|^2 = g_{\alpha\beta} \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12}^\beta + M^2,$$

e portanto

$$\partial_{vu} g_u \cdot g_v = \frac{1}{2} G_{uu} - g_{\alpha\beta} \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12}^\beta - M^2. \quad (2)$$

Igualando (1) e (2), segue que

$$LN - M^2 = \partial_v \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right) - \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{E_u}{2} \Gamma_{22}^1 - \left(F_u - \frac{E_v}{2} \right) \Gamma_{22}^2 + g_{\alpha\beta} \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12}^\beta.$$

Todos os termos do segundo membro dependem apenas de E, F, G e das suas derivadas, porque os símbolos de Christoffel acabaram de ser expressos em função desses dados. Assim, $LN - M^2$ é intrínseco e, como $EG - F^2$ também o é,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

depende apenas da primeira forma fundamental. Consequentemente, uma isometria preserva K . $\square$

O caráter surpreendente do teorema reside precisamente aqui: K foi introduzida através do aplicação normal e da segunda forma fundamental, mas a sua expressão final não necessita do campo normal nem da maneira como a superfície está colocada em $\mathbb{R}^3$.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A curvatura de Gauss nasce da teoria das superfícies de C. F. Gauss. O ponto decisivo é o *Theorema Egregium*: embora K seja inicialmente introduzida através da aplicação de Gauss e da segunda forma fundamental, ela é determinada inteiramente pela primeira forma fundamental. Esta descoberta estabelece a passagem conceptual da geometria extrínseca para a geometria intrínseca.

As curvaturas principais são os valores próprios do operador de Weingarten; as direções próprias correspondentes determinam as linhas de curvatura. A fórmula de Olinde Rodrigues relaciona diretamente a derivada da normal ao longo de uma linha principal com a respetiva curvatura principal. As equações de Gauss e de Codazzi–Mainardi, introduzidas no capítulo anterior, reaparecem aqui como instrumentos essenciais para ligar a curvatura extrínseca aos dados métricos.

O texto clássico de Gauss é *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, apresentado em 1827. Para exposições modernas da curvatura das superfícies e do Teorema Egregium, seguimos sobretudo Umehara–Yamada; do Carmo e Bär constituem referências complementares particularmente úteis.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827; tradução inglesa em *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*, trad. J. C. Morehead e A. M. Hiltebeitel, Princeton, 1902.

M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, Singapore, 2017.

M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated 2nd ed., Dover, 2016.

C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

Capítulo 4

Geodésicas e geometria global das superfícies

O Teorema Egregium mostrou que a curvatura de Gauss é determinada pela métrica. Prosseguimos agora a exploração das consequências desta propriedade. Primeiro retomamos o teorema de Gauss sob a forma das equações de compatibilidade e deduzimos resultados globais de rigidez. Em seguida regressamos às geodésicas, agora de um ponto de vista intrínseco e variacional, até às coordenadas geodésicas e ao aplicação exponencial.

4.1 Consequências e uma segunda demonstração do Teorema Egregium

Recordemos a parte tangencial das equações de Gauss. Uma das identidades de compatibilidade pode escrever-se sob a forma

$$\partial_v \Gamma_{11}^1 - \partial_u \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = LW_2^1 - MW_1^1.$$

O membro esquerdo depende apenas de E, F, G e das suas derivadas. Como

$$W = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

temos

$$LW_2^1 - MW_1^1 = \frac{L(GM - FN) - M(GL - FM)}{EG - F^2} = -F \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -FK.$$

Assim, sempre que $F \neq 0$, esta identidade fornece diretamente uma expressão de K em termos da métrica. Nos pontos ou coordenadas em que $F = 0$, usam-se as restantes componentes das equações de Gauss. Esta é uma segunda maneira de ver o conteúdo do Teorema Egregium: o tensor de curvatura da conexão determinada pela métrica contém a curvatura de Gauss.

No caso ortogonal, $F = 0$, obtém-se em particular

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\partial_v \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_u \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

Esta fórmula torna especialmente visível o caráter intrínseco de K .

Se, além disso, as coordenadas são principais, $F = M = 0$, as equações de Codazzi–Mainardi escrevem-se

$$\partial_v L = \frac{E_v}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = HE_v, \quad \partial_u N = \frac{G_u}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = HG_u.$$

Estas relações serão utilizadas no estudo da rigidez da esfera.

4.2 Rigidez da esfera

Começemos por um lema local nos pontos críticos das curvaturas principais. Escolhamos, num ponto não umbilical, coordenadas principais, de modo que $F = M = 0$, $\kappa_1 = L/E$ e $\kappa_2 = N/G$.

Lema 4.1. *Num ponto crítico simultâneo apropriado das curvaturas principais, ou $\kappa_1 = \kappa_2$, ou*

$$(\kappa_2 - \kappa_1)EGK = -E \partial_{vv}\kappa_1 + G \partial_{uu}\kappa_2.$$

Demonstração. Das equações de Codazzi–Mainardi,

$$\partial_v(E\kappa_1) = \frac{E_v}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \partial_u(G\kappa_2) = \frac{G_u}{2}(\kappa_1 + \kappa_2),$$

segue

$$E \partial_v\kappa_1 = \frac{E_v}{2}(\kappa_2 - \kappa_1), \quad G \partial_u\kappa_2 = \frac{G_u}{2}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Num ponto crítico, se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, obtemos $E_v = G_u = 0$. Derivando uma vez mais no ponto,

$$E_{vv} = \frac{2E}{\kappa_2 - \kappa_1} \partial_{vv}\kappa_1, \quad G_{uu} = -\frac{2G}{\kappa_2 - \kappa_1} \partial_{uu}\kappa_2.$$

Substituindo estas relações na fórmula ortogonal para K e usando $E_v = G_u = 0$, resulta a identidade anunciada. $\square$

Teorema 4.2 (Rigidez para curvatura de Gauss constante). *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, conexa, compacta, sem bordo e com curvatura de Gauss constante, então S é uma esfera.*

Demonstração. Uma superfície regular compacta possui pelo menos um ponto elítico; como K é constante, segue que $K > 0$ em toda a superfície. Assim as duas curvaturas principais têm o mesmo sinal, que fixamos positivo escolhendo a orientação adequada.

Pela compacidade, κ_1 atinge um mínimo e κ_2 um máximo. Como $K = \kappa_1\kappa_2$ é constante, podemos escolher um ponto P em que estes extremos são compatíveis. No ponto P ,

$$\partial_{vv}\kappa_1(P) \geq 0, \quad \partial_{uu}\kappa_2(P) \leq 0.$$

O lema anterior implica então que $\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$. Para qualquer $Q \in S$,

$$\kappa_2(P) \geq \kappa_2(Q) \geq \kappa_1(Q) \geq \kappa_1(P) = \kappa_2(P),$$

logo $\kappa_1(Q) = \kappa_2(Q)$ para todo Q . Todos os pontos são, portanto, umbilicais. Pelo resultado do capítulo anterior, uma superfície conexa totalmente umbilical é uma porção de plano ou de esfera; como $K > 0$, é uma porção de esfera. A compacidade e a ausência de bordo implicam que essa porção é a esfera inteira. $\square$

Corolário 4.3. *Se S é regular, conexa, compacta e sem bordo, com $K > 0$ e H constante, então S é uma esfera.*

Demonstração. Como $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ é constante, uma curvatura principal é função decrescente da outra. O mesmo argumento de máximo e mínimo aplica-se e força $\kappa_1 = \kappa_2$ em toda a superfície. $\square$

Teorema 4.4 (Rigidez isométrica da esfera). *Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, conexa e compacta, isométrica a uma esfera, então Σ é uma esfera.*

Demonstração. Pelo Teorema Egregium, uma isometria preserva a curvatura de Gauss. Logo Σ tem a mesma curvatura de Gauss constante e positiva da esfera. A isometria preserva também as propriedades topológicas relevantes, e o teorema anterior conclui que Σ é uma esfera. $\square$

Nota 4.5. A palavra *rigidez* tem uma interpretação mecânica natural: uma casca esférica idealmente flexível mas inextensível só pode deformar-se por isometrias; o resultado anterior afirma que, dentro desta classe e sob as hipóteses indicadas, não existe uma deformação isométrica que transforme a esfera numa superfície de forma diferente.

4.3 Equações intrínsecas das geodésicas

Já obtivemos as equações locais das geodésicas

$$\ddot{w}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0.$$

Como os símbolos de Christoffel são determinados por E, F, G , podemos escrevê-las inteiramente em termos da métrica. Multiplicando pelo tensor métrico, obtemos

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2} (E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2),$$

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2} (E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2).$$

Estas equações mostram novamente que a noção de geodésica depende apenas da primeira forma fundamental.

Lema 4.6. *Toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função sobre o seu plano tangente.*

Demonstração. Seja $p : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização regular e $P = p(0,0)$. Depois de uma translação e rotação, podemos supor que $P = 0$ e que $T_P S$ é o plano (x, y) . A projeção ortogonal de $p(u, v)$ sobre $T_P S$ tem diferencial invertível em $(0,0)$, pois Dp tem posto dois e a imagem de $Dp(0,0)$ é precisamente $T_P S$. Pelo teorema da função inversa, esta projeção é localmente invertível. Assim, numa vizinhança de P ,

$$S = \{(x, y, f(x, y))\},$$

com $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = 0$. $\square$

Corolário 4.7 (Existência e unicidade local de geodésicas). *Para cada $P \in S$ e cada $v \in T_P S$, existe uma única geodésica local γ tal que*

$$\gamma(0) = P, \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

Demonstração. Em coordenadas locais, a equação geodésica é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes suaves. O teorema de existência e unicidade para EDOs fornece uma única solução para os dados iniciais $(w(0), \dot{w}(0))$. No ponto P podemos escolher coordenadas cartesianas no plano tangente, para as quais $E(P) = G(P) = 1$ e $F(P) = 0$. $\square$

4.4 Geodésicas e o problema variacional

Consideremos uma curva $x : [a, b] \rightarrow S$ com extremos fixos. O seu comprimento é

$$\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(x, \dot{x}) dt, \quad L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}.$$

É conveniente introduzir também a energia

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta dt.$$

Para parametrizações de velocidade constante, os pontos críticos dos dois funcionais correspondem-se. As equações de Euler–Lagrange para o integrando quadrático

$$L_2(x, \dot{x}) = g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

são

$$0 = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{d}{dt} (2g_{\gamma\beta} \dot{x}^\beta).$$

Desenvolvendo a derivada e multiplicando por $g^{\kappa\gamma}/2$, obtemos

$$\ddot{x}^\kappa + \frac{1}{2} g^{\kappa\gamma} (\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0.$$

Pela fórmula de Levi–Civita,

$$\ddot{x}^\kappa + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0.$$

Portanto as geodésicas são precisamente os pontos críticos da energia, e, quando parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, também do comprimento.

Teorema 4.8 (Minimização local). *Todo segmento geodésico suficientemente curto minimiza o comprimento entre os seus extremos. Numa vizinhança normal suficientemente pequena de P , cada ponto Q é ligado a P por uma única geodésica minimizante.*

Nota 4.9. A qualificação *local* é essencial. Uma geodésica pode deixar de minimizar depois de ser prolongada. Na esfera, por exemplo, um arco de círculo máximo que ultrapassa o ponto antípoda continua a ser geodésico, mas já não é o caminho mais curto entre os seus extremos.

4.5 Vizinhanças e coordenadas geodésicas

Fixemos $P \in S$ e uma base ortonormada (e_1, e_2) de $T_P S$. Para Q suficientemente próximo de P , escrevemos (r, θ) , onde r é a distância geodésica de P a Q e θ é o ângulo da velocidade inicial da geodésica radial com e_1 . Assim obtemos coordenadas polares geodésicas

$$p = p(r, \theta).$$

Os vetores coordenados são

$$g_r = \partial_r p, \quad g_\theta = \partial_\theta p.$$

Como $r \mapsto p(r, \theta)$ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco,

$$E = g_r \cdot g_r = 1.$$

Além disso, as geodésicas radiais são ortogonais às curvas $r = \text{const.}$, de modo que $F = g_r \cdot g_\theta = 0$. Escrevendo

$$G = g_\theta \cdot g_\theta = h^2(r, \theta),$$

obtemos a forma fundamental geodésica

$$ds^2 = dr^2 + h^2(r, \theta)d\theta^2.$$

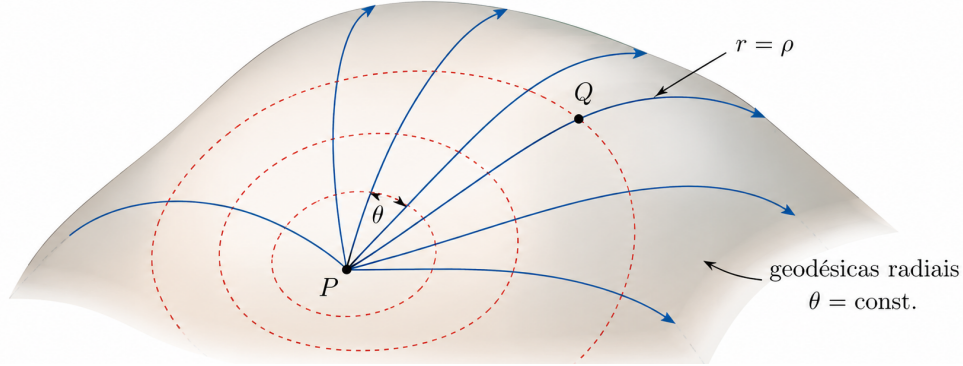


Figura 4.1: Coordenadas polares geodésicas centradas em P . As curvas $\theta = \text{const.}$ são geodésicas radiais e $r = \rho$ é um círculo geodésico.

Lema 4.10 (Forma da métrica em coordenadas polares geodésicas). *Vale*

$$h(0, \theta) = 0, \quad \partial_r h(0, \theta) = 1.$$

Mais precisamente,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r, \theta) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{h(r, \theta)}{r} = 1.$$

Demonstração. A primeira relação exprime o facto de todas as direcções θ representarem o mesmo ponto P quando $r = 0$. Para a segunda, projetemos $Q = p(r, \theta)$ no plano tangente em P . Como a superfície é localmente um gráfico com $\nabla f(P) = 0$, a métrica coincide com a métrica euclidiana na primeira ordem. O jacobiano da passagem das coordenadas cartesianas do plano tangente para coordenadas polares contribui com um fator r ; portanto

$$h(r, \theta) = r \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2},$$

onde $\tilde{E} \rightarrow 1$, $\tilde{G} \rightarrow 1$ e $\tilde{F} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Daí $h/r \rightarrow 1$. □

Para a métrica

$$ds^2 = dr^2 + h^2 d\theta^2,$$

os símbolos de Christoffel potencialmente não nulos são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -h h_r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{h_r}{h}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{h_\theta}{h}.$$

Em coordenadas normais cartesianas centradas em P , a métrica satisfaz

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(P) = 0.$$

Assim, a geometria é euclidiana no ponto até primeira ordem; a curvatura aparece nas ordens seguintes.

4.6 Aplicação exponencial

Para $v \in T_P S$ suficientemente pequeno, seja γ_v a geodésica determinada por

$$\gamma_v(0) = P, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

Depois de restringir a um vizinho de $0 \in T_P S$ em que a solução está definida até $t = 1$, define-se o *aplicação exponencial*

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

Em particular,

$$\exp_P(0) = P.$$

Existe um aberto $V \subset T_P S$ contendo 0 tal que, depois de eventualmente o reduzir,

$$\exp_P : V \longrightarrow U_P \subset S$$

é um difeomorfismo. A aplicação inversa fornece coordenadas normais em U_P . Se

$$v = r(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2),$$

então (r, θ) são as coordenadas polares geodésicas correspondentes.

Nota 4.11. O domínio local de $\exp_P$ é um aberto de $T_P S$ em torno de 0, e não a circunferência unitária S^1 . A circunferência $S^1 \subset T_P S$ parametriza apenas as direções iniciais; o módulo r determina a distância percorrida ao longo da geodésica.

4.7 Interpretações da curvatura de Gauss

As coordenadas geodésicas permitem dar uma interpretação particularmente simples da curvatura de Gauss. Recordemos que, numa vizinhança geodésica de P ,

$$ds^2 = dr^2 + h^2(r, \theta) d\theta^2, \quad h(0, \theta) = 0, \quad h_r(0, \theta) = 1.$$

A fórmula intrínseca da curvatura reduz-se então a

$$K = -\frac{h_{rr}}{h}. \quad (4.1)$$

Assim, a função h , que mede a componente angular da métrica, contém diretamente a informação sobre a curvatura.

4.7.1 Curvatura e afastamento das geodésicas

A equação (4.1) pode ser escrita

$$h_{rr} + Kh = 0.$$

Se K é constante, as condições iniciais $h(0) = 0$ e $h_r(0) = 1$ dão

$$h(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} r), & K > 0, \\ r, & K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} r), & K < 0. \end{cases}$$

Fixemos duas geodésicas radiais $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$. O arco do círculo geodésico $r = \rho$ compreendido entre elas tem comprimento

$$L(\rho) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\rho, \theta) d\theta.$$

Deste modo, h mede infinitesimalmente o afastamento entre geodésicas que partem de P . Para $K < 0$, a solução hiperbólica cresce mais rapidamente que no plano; para $K > 0$, a solução trigonométrica exprime a tendência de geodésicas inicialmente divergentes voltarem a aproximar-se.

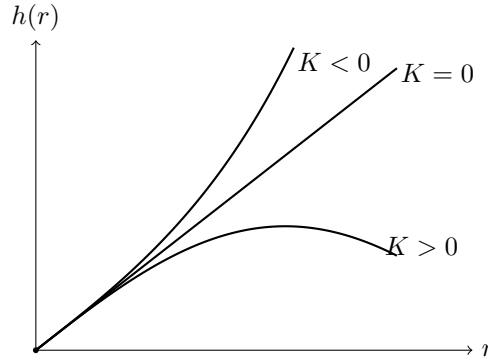


Figura 4.2: A função h mede o afastamento transversal de geodésicas radiais. As três curvas satisfazem $h(0) = 0$ e $h_r(0) = 1$, tendo portanto a mesma tangente em $r = 0$. Curvatura positiva tende a reconduzir as geodésicas; curvatura negativa aumenta a divergência relativamente ao caso plano.

4.7.2 Planicidade local, isometrias e teorema de Minding

Lema 4.12. *Uma superfície é localmente isométrica ao plano euclidiano se e somente se $K = 0$.*

Demonstração. Se a métrica é localmente euclidiana, o Teorema Egregium implica imediatamente $K = 0$. Reciprocamente, se $K = 0$, então (4.1) dá $h_{rr} = 0$. Das condições $h(0, \theta) = 0$ e $h_r(0, \theta) = 1$ resulta

$$h(r, \theta) = r.$$

Logo

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Introduzindo

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

obtemos

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2,$$

o que fornece a isometria local pretendida. □

Se $f : S_1 \rightarrow S_2$ é suave, dizemos que f é uma *isometria local* quando

$$I_1^{S_1}(X, Y)_p = I_1^{S_2}(df_p X, df_p Y)_{f(p)}$$

para todos $X, Y \in T_p S_1$. Se, além disso, f é bijetiva, obtém-se uma isometria global.

Teorema 4.13 (Minding). *Duas superfícies com a mesma curvatura de Gauss constante são localmente isométricas.*

Demonstração. Se K é constante, em coordenadas polares geodésicas centradas em pontos arbitrários das duas superfícies, a função h satisfaz em ambos os casos o mesmo problema de Cauchy

$$h_{rr} + Kh = 0, \quad h(0, \theta) = 0, \quad h_r(0, \theta) = 1.$$

A unicidade da solução fornece a mesma expressão para h nas duas superfícies. Portanto as duas métricas têm localmente a mesma forma

$$ds^2 = dr^2 + h^2(r)d\theta^2,$$

e a identificação das coordenadas (r, θ) define uma isometria local. $\square$

Em particular, plano, cilindro e cone, fora do vértice deste último, são localmente indistinguíveis do ponto de vista métrico: todos têm $K = 0$. Em contrapartida, uma região da esfera de raio R não pode ser representada isometricamente num plano, pois a esfera tem $K = R^{-2}$ e o plano tem $K = 0$. Esta é a obstrução geométrica fundamental à existência de aplicações cartográficas perfeitamente isométricas.

4.7.3 Comprimento e área dos pequenos círculos geodésicos

Se C_r é o círculo geodésico de raio r centrado em P , o seu comprimento é

$$L(r) = \int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta,$$

e a área do disco geodésico D_r é

$$A(r) = \int_0^r L(\rho) d\rho.$$

Teorema 4.14 (Interpretação geométrica de K). *No ponto P ,*

e

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3}$$

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}.$$

Demonstração. Pela primeira fórmula, usando duas vezes a regra de l'Hôpital e as condições iniciais de h ,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-h_{rr}(r, \theta)}{r} d\theta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta) \frac{h(r, \theta)}{r} d\theta \\ &= K(P), \end{aligned}$$

pois $h(r, \theta)/r \rightarrow 1$ e $K(r, \theta) \rightarrow K(P)$. A fórmula para a área segue de $A'(r) = L(r)$, aplicando novamente l'Hôpital. $\square$

Quando K é constante, derivando $h_{rr} = -Kh$ em $r = 0$ obtemos

$$h(0) = 0, \quad h_r(0) = 1, \quad h_{rr}(0) = 0, \quad h_{rrr}(0) = -K.$$

Portanto

$$h(r) = r - \frac{K}{6}r^3 + o(r^3),$$

e conseqüentemente

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi K}{3}r^3 + o(r^3), \quad A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi K}{12}r^4 + o(r^4).$$

A curvatura de Gauss mede assim, na primeira ordem não euclidiana, o defeito de comprimento e de área dos pequenos círculos e discos geodésicos.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A teoria das geodésicas está já profundamente presente nas investigações de Gauss sobre superfícies curvas. A introdução de coordenadas adaptadas às geodésicas permite tornar localmente euclidiana a métrica num ponto e constitui uma das portas de entrada para a geometria riemanniana abstrata. A rigidez da esfera ilustra a passagem de informação local para conclusões globais. O Teorema Egregium fornece o ingrediente intrínseco essencial: uma deformação isométrica preserva K . As propriedades variacionais das geodésicas ligam, por sua vez, a geometria diferencial ao cálculo das variações: a equação geodésica é a equação de Euler–Lagrange da energia, e segmentos geodésicos suficientemente curtos realizam a distância.

O aplicação exponencial organiza estas geodésicas a partir de um ponto e prepara diretamente a definição de coordenadas normais em variedades riemannianas. Para estes temas, Umehara–Yamada, do Carmo e Bär oferecem tratamentos complementares, do ponto de vista clássico das superfícies e da transição para a geometria riemanniana.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827; tradução inglesa em *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*, trad. J. C. Morehead e A. M. Hildebrandt, Princeton, 1902.

M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, Singapore, 2017.

M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated 2nd ed., Dover, 2016.

C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

Capítulo 5

Teoremas de Gauss–Bonnet

O Teorema Egregium mostrou que a curvatura de Gauss é intrínseca. Os teoremas de Gauss–Bonnet vão mais longe: relacionam a integral de K sobre uma região com o comportamento da sua fronteira e, globalmente, com a topologia da superfície. A passagem será feita em três etapas: triângulos geodésicos, polígonos curvilíneos e superfícies compactas trianguladas.

5.1 Gauss–Bonnet para triângulos geodésicos

Trabalhem numa vizinhança geodésica de um ponto P , com

$$ds^2 = dr^2 + h^2(r, \theta)d\theta^2.$$

Se $s \mapsto \gamma(s) = p(r(s), \theta(s))$ é uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, seja $\varphi(s)$ o ângulo orientado entre $\gamma'(s)$ e a geodésica radial $r \mapsto p(r, \theta(s))$.

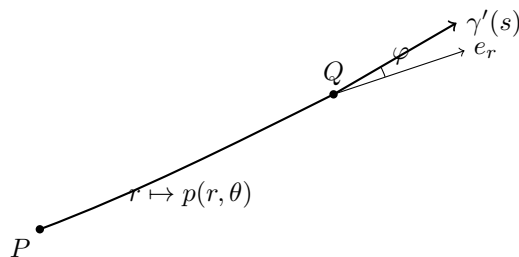


Figura 5.1: Ângulo φ entre a tangente à geodésica γ e a direção geodésica radial em Q .

Lema 5.1. *Ao longo de γ ,*

$$\varphi' = -\theta' h_r.$$

Demonstração. Os vetores

$$e_r = p_r, \quad e_\theta = \frac{1}{h} p_\theta$$

formam uma base ortonormada. Assim,

$$\gamma' = \cos \varphi p_r + \frac{\sin \varphi}{h} p_\theta,$$

e, comparando com $\gamma' = r'p_r + \theta'p_\theta$,

$$r' = \cos \varphi, \quad \theta' = \frac{\sin \varphi}{h}.$$

A primeira equação geodésica, usando $\Gamma_{\theta\theta}^r = -hh_r$, é

$$r'' - hh_r(\theta')^2 = 0.$$

Substituindo as relações anteriores,

$$-\sin \varphi \varphi' - hh_r \frac{\sin^2 \varphi}{h^2} = 0,$$

isto é,

$$-\sin \varphi (\varphi' + \theta' h_r) = 0.$$

Se $\sin \varphi \neq 0$, segue imediatamente a tese. Se $\sin \varphi$ se anula num intervalo, então φ e θ são constantes nesse intervalo. Nos pontos isolados onde $\sin \varphi = 0$, a identidade segue por continuidade. $\square$

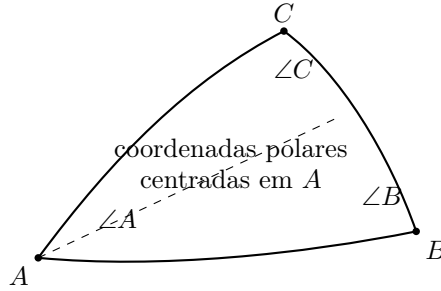


Figura 5.2: Triângulo geodésico ABC . Os lados são segmentos de geodésicas; a demonstração usa coordenadas polares geodésicas centradas em A .

Teorema 5.2 (Gauss-Bonnet para um triângulo geodésico). *Se ΔABC é um triângulo cujos lados são segmentos geodésicos e cujos ângulos interiores são A, B, C , então*

$$A + B + C = \pi + \int_{\Delta ABC} K dS.$$

Demonstração. Começamos pelo caso em que ΔABC está contido numa vizinhança geodésica centrada em A . Escolhemos as coordenadas de modo que

$$B = (r_B, 0), \quad C = (r_C, A).$$

Os lados AB e AC são geodésicas radiais. Parametrizemos BC por comprimento de arco,

$$\gamma(s) = p(r(s), \theta(s)).$$

A função θ é estritamente monótona em BC . Com efeito, se $\theta'(s_0) = 0$, então BC seria tangente, no ponto $R = \gamma(s_0)$, à geodésica radial $\theta = \theta(s_0)$. Pela unicidade local da geodésica com posição e velocidade prescritas, as duas geodésicas coincidiriam, o que obrigaria $A \in BC$, contradição. Como θ varia de 0 a A , podemos escrever

$$BC : \quad \theta \mapsto p(\hat{r}(\theta), \theta), \quad 0 \leq \theta \leq A,$$

e

$$\Delta ABC = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq A, 0 \leq r \leq \hat{r}(\theta)\}.$$

Usando $K = -h_{rr}/h$ e $dS = h dr d\theta$,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta ABC} K dS &= - \int_0^A \int_0^{\hat{r}(\theta)} h_{rr}(r, \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^A (1 - h_r(\hat{r}(\theta), \theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.1, ao longo de BC ,

$$-h_r = \frac{\varphi'}{\theta'},$$

pelo que

$$\int_{\Delta ABC} K dS = A + \varphi(C) - \varphi(B).$$

Pela geometria dos ângulos nos vértices,

$$B = \pi - \varphi(B), \quad C = \varphi(C).$$

Logo

$$\int_{\Delta ABC} K dS = A + B + C - \pi.$$

Se o triângulo não estiver contido numa única vizinhança geodésica, subdivide-se em triângulos suficientemente pequenos. Somando as fórmulas locais, os ângulos interiores introduzidos pela subdivisão cancelam-se da maneira habitual, ficando exatamente a mesma identidade para ΔABC . $\square$

5.2 Curvatura geodésica e polígonos curvilíneos

Seja γ uma curva unitária orientada numa superfície orientada, com normal unitária ν . Define-se a *curvatura geodésica assinada* por

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot (\nu \times \gamma').$$

A aceleração de uma curva unitária decompõe-se nas componentes normal e tangencial à superfície; assim, $\kappa_g = 0$ para uma geodésica.

Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormada móvel ao longo da curva e ϑ é o ângulo de γ' relativamente a e_1 , a variação da direção tangente contém duas contribuições: a rotação da curva relativamente à base e a rotação da própria base. Na notação acima,

$$e_1 \cdot e'_2 = \vartheta' - \kappa_g.$$

Por outro lado, para uma base ortonormada definida numa carta,

$$\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_v e_1 \cdot \partial_u e_2 = K \sqrt{EG - F^2}.$$

Estas duas identidades fazem a ponte entre o teorema das tangentes girantes do Capítulo 1 e a curvatura da superfície.

Teorema 5.3 (Gauss–Bonnet para um polígono curvilíneo). *Seja D uma região topológica de disco cuja fronteira, orientada positivamente, é uma curva simples, fechada e regular por partes, formada por arcos regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_N$. Se $A_1, \dots, A_N$ são os ângulos interiores nos vértices,*

então

$$\sum_{i=1}^N A_i = (N-2)\pi + \int_D K dS + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \kappa_g ds.$$

Equivalentemente, se $\varepsilon_i = \pi - A_i$ são os ângulos exteriores orientados,

$$\int_D K dS + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 2\pi.$$

Demonstração. Escolhamos numa vizinhança contendo D uma base ortonormada móvel $\{e_1, e_2\}$ e seja ϑ o ângulo entre a tangente e e_1 em cada arco regular. Pelo teorema generalizado das tangentes girantes,

$$2\pi - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vartheta'(s) ds.$$

Como

$$\vartheta' = \kappa_g + e_1 \cdot e_2',$$

temos

$$2\pi - \sum_i \varepsilon_i = \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa_g ds + \int_{\partial D} e_1 \cdot de_2.$$

Escrevendo a última integral em coordenadas,

$$\int_{\partial D} e_1 \cdot de_2 = \int_{\partial D} (e_1 \cdot \partial_u e_2) du + (e_1 \cdot \partial_v e_2) dv.$$

Pelo teorema de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} e_1 \cdot de_2 &= \int_D [\partial_u (e_1 \cdot \partial_v e_2) - \partial_v (e_1 \cdot \partial_u e_2)] du dv \\ &= \int_D (\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_v e_1 \cdot \partial_u e_2) du dv \\ &= \int_D K \sqrt{EG - F^2} du dv = \int_D K dS. \end{aligned}$$

Portanto

$$2\pi - \sum_i \varepsilon_i = \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa_g ds + \int_D K dS.$$

Como $\varepsilon_i = \pi - A_i$, obtemos a primeira forma da fórmula. □

Para $N = 3$ e lados geodésicos, $\kappa_g = 0$ em cada lado e recupera-se o Teorema 5.2.

5.3 Gauss–Bonnet global

Para passar da fórmula local à global, utilizamos uma triangulação. Uma triangulação de um compacto $D \subset S$ é uma decomposição finita em triângulos curvilíneos tais que dois triângulos distintos são disjuntos ou se intersectam apenas numa aresta comum ou num vértice comum. Escolhendo a triangulação suficientemente fina, cada triângulo pode ser tomado dentro de uma vizinhança geodésica.

Se V , A e T denotam, respetivamente, o número de vértices, arestas e triângulos, define-se a *característica de Euler*

$$\chi(D) = V - A + T.$$

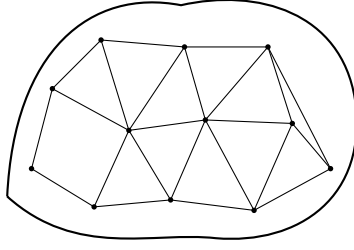


Figura 5.3: Triangulação de uma região compacta da superfície. A soma das fórmulas locais de Gauss–Bonnet faz cancelar as contribuições das arestas interiores e deixa aparecer $V - A + T$.

Teorema 5.4 (Gauss–Bonnet global). *Seja D uma região compacta de uma superfície orientada, com fronteira suave, ou sem fronteira. Então*

$$\int_D K \, dS + \int_{\partial D} \kappa_g \, ds = 2\pi\chi(D).$$

Quando $\partial D = \emptyset$, o segundo termo é nulo.

Demonstração. Seja uma triangulação de D por T triângulos. Aplicando o Teorema 5.3 a cada triângulo Δ_j ,

$$\int_{\Delta_j} K \, dS + \int_{\partial\Delta_j} \kappa_g \, ds = (A_j + B_j + C_j) - \pi.$$

Somemos sobre todos os triângulos.

Como os interiores são disjuntos,

$$\sum_{j=1}^T \int_{\Delta_j} K \, dS = \int_D K \, dS.$$

Cada aresta interior é percorrida duas vezes com orientações opostas; as respectivas integrais de curvatura geodésica cancelam-se. Restam apenas as arestas da fronteira, de modo que

$$\sum_{j=1}^T \int_{\partial\Delta_j} \kappa_g \, ds = \int_{\partial D} \kappa_g \, ds.$$

Sejam n_1 e n_2 os números de vértices interiores e de fronteira. Em cada vértice interior, a soma dos ângulos incidentes é 2π ; num vértice da triangulação situado numa fronteira suave, é π . Assim,

$$\sum_{j=1}^T (A_j + B_j + C_j) = 2\pi n_1 + \pi n_2.$$

Se l_1 e l_2 são os números de arestas interiores e de fronteira, então

$$A = l_1 + l_2, \quad 3T = 2l_1 + l_2, \quad n_2 = l_2, \quad V = n_1 + n_2.$$

Logo

$$\begin{aligned} 2\pi n_1 + \pi n_2 - \pi T &= 2\pi(n_1 + n_2) - \pi n_2 - \pi T \\ &= 2\pi V - \pi(3T - 2l_1) - \pi T \\ &= 2\pi V - 2\pi(l_1 + l_2) + 2\pi T \\ &= 2\pi(V - A + T). \end{aligned}$$

Isto prova a fórmula. □

Corolário 5.5. *Para uma superfície fechada, $\chi(S)$ não depende da triangulação escolhida.*

Demonstração. Pelo teorema global,

$$2\pi\chi(S) = \int_S K dS,$$

e o membro direito não depende da triangulação. □

5.4 Consequências topológicas

O teorema anterior transforma uma integral de uma quantidade geométrica local numa quantidade topológica discreta. Se uma superfície fechada é deformada por um difeomorfismo, uma triangulação é transportada para uma triangulação com os mesmos números V, A, T ; portanto a característica de Euler permanece inalterada.

5.4.1 Soma conexa e gênero

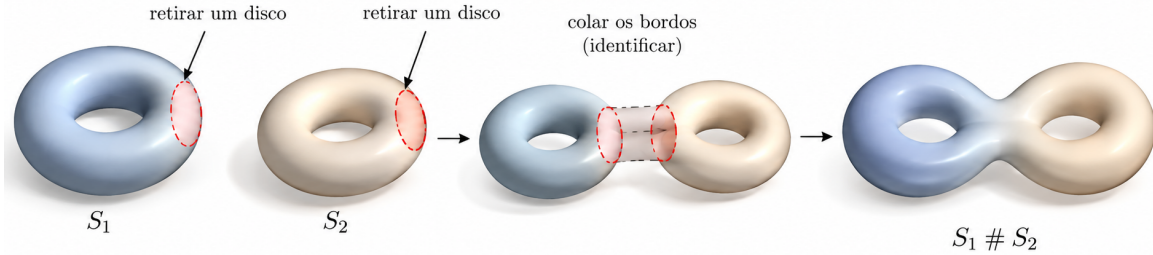


Figura 5.4: Soma conexa de duas superfícies. Retira-se um disco de cada superfície e identificam-se os dois círculos de bordo. O resultado mostrado é uma superfície de gênero 2, $S_1 \# S_2$.

Se S_1 e S_2 são superfícies compactas e conexas, retira-se de cada uma um disco aberto e identificam-se as duas circunferências de bordo por um difeomorfismo. A superfície obtida chama-se *soma conexa* e denota-se

$$S_1 \# S_2.$$

Para superfícies orientáveis fechadas, o gênero g conta o número de “alças”: a esfera tem gênero 0, o toro gênero 1, e a soma conexa de g toros tem gênero g .

A classificação topológica das superfícies compactas conexas afirma que toda superfície fechada conexa é homeomorfa ou a uma soma conexa de toros, no caso orientável, ou a uma soma conexa de planos projetivos, no caso não orientável. No presente curso utilizaremos sobretudo o caso orientável.

5.4.2 Característica de Euler das superfícies orientáveis

Uma triangulação do toro dá

$$\chi(T^2) = 0.$$

Mais geralmente, a soma conexa satisfaz

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Como $\chi(S^2) = 2$ e $\chi(T^2) = 0$, obtemos por indução:

Teorema 5.6 (Gauss–Bonnet topológico). *Se S é uma superfície orientável, fechada e conexa de gênero g , então*

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

e, consequentemente,

$$\int_S K dS = 4\pi(1 - g).$$

Demonstração. Para $g = 0$, S é homeomorfa à esfera e $\chi(S) = 2$. Para $g = 1$, uma triangulação do toro fornece $\chi(T^2) = 0 = 2 - 2$. Suponhamos agora

$$\chi(T_g) = 2 - 2g.$$

Como $T_{g+1} = T_g \# T^2$,

$$\chi(T_{g+1}) = \chi(T_g) + \chi(T^2) - 2 = (2 - 2g) + 0 - 2 = 2 - 2(g + 1).$$

A fórmula integral segue imediatamente de Gauss–Bonnet global para uma superfície sem bordo:

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S) = 4\pi(1 - g).$$

□

Assim, uma esfera tem curvatura total 4π , enquanto qualquer toro tem curvatura total nula. Para gênero $g \geq 2$, a curvatura total é negativa, independentemente da forma concreta como a superfície esteja mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A fórmula de Gauss–Bonnet constitui um dos primeiros exemplos fundamentais de uma relação entre geometria local e topologia global. A contribuição de Gauss aparece inicialmente na geometria dos triângulos geodésicos e na interpretação intrínseca da curvatura; a extensão a regiões mais gerais é tradicionalmente associada a Bonnet. Na forma global, a integral da curvatura de Gauss deixa de depender dos detalhes métricos e é determinada pela característica de Euler. O resultado explica também por que a característica de Euler, introduzida combinatoriamente por meio de uma triangulação, é na realidade um invariante da superfície. Para superfícies orientáveis fechadas, a classificação topológica reduz este invariante ao gênero pela fórmula $\chi = 2 - 2g$. Para o tratamento clássico por superfícies em $\mathbb{R}^3$, as referências principais deste capítulo são Umehara–Yamada e do Carmo. Bär fornece uma apresentação que prepara naturalmente a passagem à geometria riemanniana, enquanto Berger coloca Gauss–Bonnet num contexto geométrico mais amplo.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827; tradução inglesa em *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*, trad. J. C. Morehead e A. M. Hiltebeitel, Princeton, 1902.

M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, Singapore, 2017.

M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated 2nd ed., Dover, 2016.

C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2003.

Capítulo 6

Derivação covariante e transporte paralelo

A derivada ordinária de um campo vetorial definido sobre uma superfície não é, em geral, tangente à superfície. A ideia fundamental deste capítulo consiste em conservar apenas a componente tangencial dessa variação. Esta operação conduz à *derivada covariante*; por sua vez, a condição de derivada covariante nula conduz ao *transporte paralelo*. Assim se encerra a geometria intrínseca das superfícies em $\mathbb{R}^3$ e se prepara a passagem, na Parte B, à formulação abstrata em variedades diferenciáveis.

6.1 Campos vetoriais e derivada covariante

Seja $U \subset S$ um aberto de uma superfície regular e seja

$$p = p(u, v)$$

uma parametrização local. Um *campo vetorial tangente* em U é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. Na base coordenada $g_u = p_u$, $g_v = p_v$, escreve-se

$$w = w^u g_u + w^v g_v.$$

O campo é diferenciável quando as suas componentes w^u, w^v são diferenciáveis.

Fixemos $p \in S$ e $y \in T_p S$. Escolha-se uma curva diferenciável α na superfície tal que

$$\alpha(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = y,$$

e considere-se o campo ao longo da curva

$$\hat{w}(t) = w(\alpha(t)).$$

A derivada ordinária

$$\frac{d\hat{w}}{dt}(0)$$

é um vetor de $\mathbb{R}^3$, mas não é necessariamente tangente a S . Denotando por ν a normal unitária à superfície, definimos a derivada covariante de w em p na direção y como a projeção ortogonal dessa derivada sobre $T_p S$:

$$D_y w(p) = \frac{d\hat{w}}{dt}(0) - \left(\frac{d\hat{w}}{dt}(0) \cdot \nu \right) \nu.$$

Em particular,

$$D_y w(p) \in T_p S.$$

Esta propriedade será essencial na generalização posterior: derivar covariantemente um campo tangente deve produzir novamente um vetor tangente.

Para w fixado, a aplicação $y \mapsto D_y w(p)$ é linear. É por isso natural escrever simbolicamente

$$D_y w = (y \cdot \nabla^\Gamma) w,$$

onde ∇^Γ designa a diferenciação covariante associada aos símbolos de Christoffel da métrica induzida.

6.2 Expressão em coordenadas

Escrevamos

$$\alpha(t) = p(u(t), v(t)), \quad y = \dot{u}(0)g_u + \dot{v}(0)g_v,$$

e

$$\widehat{w}(t) = w^u(u(t), v(t))g_u + w^v(u(t), v(t))g_v.$$

Derivando em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{w}}{dt} &= \dot{w}^u g_u + \dot{w}^v g_v \\ &\quad + w^u(p_{uu}\dot{u} + p_{uv}\dot{v}) + w^v(p_{vu}\dot{u} + p_{vv}\dot{v}). \end{aligned}$$

A componente tangencial das derivadas da base é descrita pelos símbolos de Christoffel:

$$(p_{\gamma\tau})^\top = \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^\beta g_\beta.$$

Consequentemente,

$$D_y w = \sum_{\beta=1}^2 \left[\dot{w}^\beta + \sum_{\gamma,\tau=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^\beta \dot{x}^\tau \right] g_\beta,$$

onde $(x^1, x^2) = (u, v)$.

Como

$$\dot{w}^\beta = \sum_{\tau=1}^2 \partial_\tau w^\beta y^\tau, \quad \dot{x}^\tau = y^\tau,$$

obtemos

$$D_y w = \sum_{\tau,\beta=1}^2 \left(\partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^\beta w^\gamma \right) y^\tau g_\beta.$$

Definimos, portanto,

$$\nabla_\tau^\Gamma w^\beta = w^\beta_{;\tau} := \partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^\beta w^\gamma.$$

A expressão obtida depende apenas de $y = \dot{\alpha}(0)$ e não da curva particular escolhida para representar esse vetor tangente.

Se g^1, g^2 denotam a base dual relativamente ao produto escalar, isto é,

$$g^\beta \cdot g_\alpha = \delta_\alpha^\beta,$$

então a derivada covariante admite ainda uma forma particularmente simples.

Lema 6.1 (Forma intrínseca da derivada covariante). *Para $\tau, \beta \in \{1, 2\}$,*

$$\nabla_\tau^\Gamma w^\beta = \partial_\tau w \cdot g^\beta.$$

Demonstração. Como $w = \sum_\gamma w^\gamma g_\gamma$,

$$\begin{aligned} \partial_\tau w \cdot g^\beta &= \partial_\tau \left(\sum_\gamma w^\gamma g_\gamma \right) \cdot g^\beta \\ &= \sum_\gamma (\partial_\tau w^\gamma) (g_\gamma \cdot g^\beta) + \sum_\gamma w^\gamma (\partial_\tau g_\gamma \cdot g^\beta) \\ &= \partial_\tau w^\beta + \sum_\gamma w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^\beta, \end{aligned}$$

que é precisamente $\nabla_\tau^\Gamma w^\beta$. □

6.3 Transporte paralelo

Seja $\gamma : I \rightarrow S$ uma curva diferenciável e w um campo vetorial tangente definido ao longo de γ . Dizemos que w é *transportado paralelamente* ao longo de γ quando

$$D_{\dot{\gamma}} w = 0.$$

No plano euclidiano, em coordenadas cartesianas, os símbolos de Christoffel são nulos; a condição anterior reduz-se então à constância das componentes do vetor. Numa superfície curva, ao contrário, os planos tangentes variam ao longo do caminho.

Teorema 6.2 (Geodésicas e transporte paralelo). *Uma curva regular γ é uma geodésica se e somente se a sua velocidade é transportada paralelamente ao longo da própria curva:*

$$D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Demonstração. Escrevendo $\gamma(t) = p(x^1(t), x^2(t))$, temos

$$\dot{\gamma} = \sum_\beta \dot{x}^\beta g_\beta.$$

Aplicando a expressão coordenada da derivada covariante com $w^\beta = \dot{x}^\beta$,

$$D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sum_\beta \left(\ddot{x}^\beta + \sum_{\gamma, \tau} \Gamma_{\gamma\tau}^\beta \dot{x}^\gamma \dot{x}^\tau \right) g_\beta.$$

Logo $D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ equivale exatamente ao sistema das equações das geodésicas. □

O transporte paralelo preserva a geometria euclidiana nos planos tangentes.

Teorema 6.3 (Invariância sob transporte paralelo). *Se a e b são campos vetoriais transportados paralelamente ao longo de γ , então $a \cdot b$ é constante. Em particular, as normas de a e b e o ângulo entre eles são constantes ao longo da curva. Além disso, as derivadas ordinárias à e e $\dot{b}$*

são normais à superfície.

Demonstração. Da definição de transporte paralelo, a componente tangencial de $\dot{a}$ e de $\dot{b}$ é nula; portanto $\dot{a}$ e $\dot{b}$ são normais a S . Como a e b são tangentes,

$$\dot{a} \cdot b = 0, \quad a \cdot \dot{b} = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \dot{a} \cdot b + a \cdot \dot{b} = 0.$$

Tomando $a = b$, obtêm-se a invariância da norma; aplicando a identidade a dois campos unitários, obtêm-se a invariância do ângulo. $\square$

Esta invariância refere-se ao produto interno durante o transporte. O resultado do transporte entre dois pontos pode, contudo, depender do caminho: numa superfície curva, dois caminhos diferentes podem produzir vetores finais diferentes. Em particular, o transporte ao longo de uma curva fechada pode fazer regressar o vetor ao ponto inicial com uma direção diferente da direção de partida. Esta dependência do caminho antecipa a relação entre transporte paralelo e curvatura.

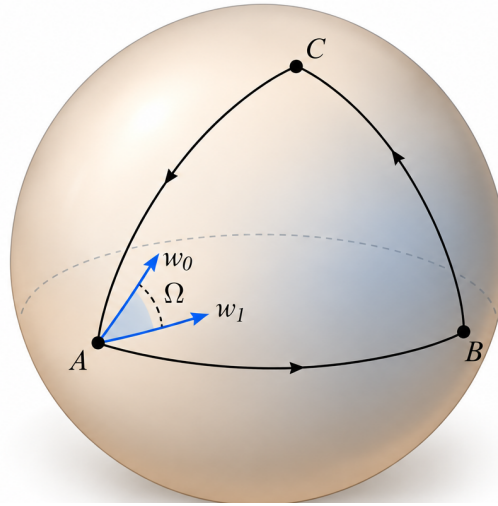


Figura 6.1: Holonomia do transporte paralelo. Depois de percorrer o laço geodésico fechado ABC , o vetor transportado paralelamente regressa ao ponto inicial A rodado de um ângulo Ω .

6.4 Curvatura geodésica

Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja $w(s)$ um campo vetorial tangente unitário ao longo de γ . Como

$$w' \cdot w = 0,$$

o vetor w' pertence ao plano ortogonal a w . Podemos portanto escrever

$$w' = \alpha \nu + \lambda(\nu \times w).$$

A projeção tangencial é

$$D_{\gamma'} w = \lambda(\nu \times w).$$

O escalar λ é o valor algébrico da derivada covariante do campo unitário w ao longo da curva.

No caso particular $w = \gamma'$, define-se a *curvatura geodésica* κ_g por

$$D_{\gamma'}\gamma' = \kappa_g(\nu \times \gamma').$$

Assim, para uma curva unitária,

$$\gamma \text{ geodésica} \iff \kappa_g = 0.$$

Esta definição coincide com a utilizada no capítulo anterior na fórmula de Gauss–Bonnet.

Aplicação: grandes círculos da esfera.

Numa geodésica unitária, a aceleração não possui componente tangencial; portanto a curvatura da curva é inteiramente normal à superfície. Num grande círculo de uma esfera, a normal principal da curva aponta para o centro da esfera e coincide, a menos da orientação, com a normal da superfície. Consequentemente, os grandes círculos são geodésicas da esfera.

6.5 Fibrado tangente e interpretação em termos de conexão

No espaço euclidiano, para comparar vetores aplicados em pontos diferentes, translada-se implicitamente cada vetor para uma origem comum. Uma base cartesiana fixa permite fazê-lo sem qualquer ambiguidade. Numa superfície curva, porém, cada vetor tangente pertence a um plano diferente e esses planos variam com o ponto. O transporte paralelo fornece uma regra para comparar vetores tangentes ao longo de um caminho.

O conjunto de todos os planos tangentes organiza-se no *fibrado tangente*

$$TS = \bigcup_{p \in S} \{p\} \times T_p S.$$

Um campo vetorial tangente é precisamente uma secção deste fibrado: a cada p associa um elemento de $T_p S$.

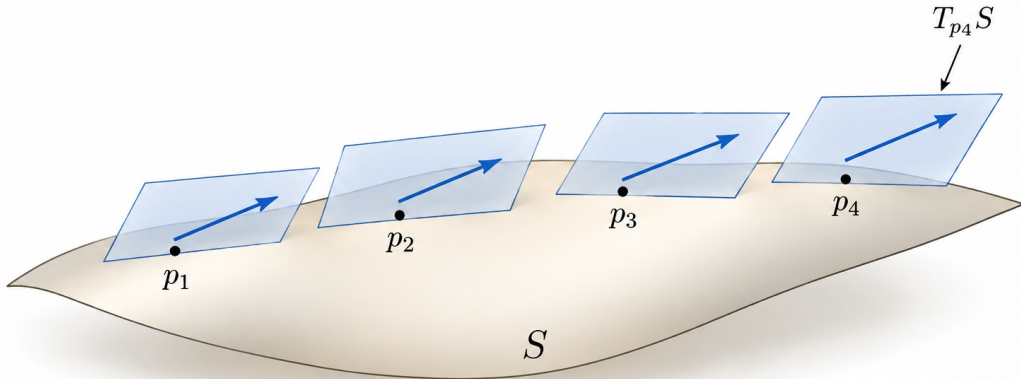


Figura 6.2: O fibrado tangente reúne os planos $T_p S$ sobre os pontos $p \in S$. Uma secção escolhe um vetor em cada fibra; uma conexão permite comparar esses vetores ao longo de curvas.

A derivada covariante pode então ser interpretada como uma primeira manifestação da noção de *conexão*: dados um campo w e uma direção $y \in T_p S$, a conexão produz um novo vetor tangente

$$\nabla_y w(p) \in T_p S.$$

No caso das superfícies de $\mathbb{R}^3$ estudadas até aqui, esta conexão é a conexão de Levi–Civita da métrica induzida e pode ser obtida projetando a derivada euclidiana sobre o plano tangente. A formulação abstrata não necessitará, porém, de um espaço ambiente. Esta será uma das ideias centrais da geometria riemanniana desenvolvida mais adiante.

A condição

$$\nabla_{\dot{\gamma}} w = 0$$

exprime que o campo w é paralelo ao longo da curva γ . A conexão determina, assim, a noção de constância de um campo quando os espaços tangentes variam de ponto para ponto.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A noção de transporte paralelo que hoje acompanha naturalmente a geometria riemanniana foi introduzida por Tullio Levi–Civita no seu trabalho de 1917, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*. O ponto decisivo consiste em tornar possível a comparação de vetores pertencentes a espaços tangentes distintos por meio de uma regra intrínseca de transporte.

Para superfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, a construção é particularmente concreta: deriva-se o campo no espaço ambiente e projeta-se a derivada no plano tangente. Esta descrição conduz exatamente à conexão de Levi–Civita da métrica induzida e prepara a passagem à definição abstrata de conexão numa variedade.

Do ponto de vista do desenvolvimento destas notas, este capítulo fecha a primeira parte: a derivada covariante, o transporte paralelo, as geodésicas e a curvatura geodésica foram obtidos ainda a partir de superfícies concretas em $\mathbb{R}^3$. Na Parte B, os mesmos conceitos serão reconstruídos sem pressupor um espaço ambiente.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

T. Levi–Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **42** (1917), 173–204.

M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, Singapore, 2017.

M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, revised and updated 2nd ed., Dover, 2016.

C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.

Parte II

Variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana

Capítulo 7

Variedades topológicas e diferenciáveis

A passagem das superfícies de $\mathbb{R}^3$ para variedades abstratas consiste em conservar aquilo que era intrínseco — a estrutura local, a diferenciabilidade e os espaços tangentes — sem pressupor a existência de um espaço ambiente. Uma variedade é, localmente, um espaço euclidiano; globalmente, porém, pode possuir uma topologia muito diferente da de um aberto de $\mathbb{R}^m$.

7.1 Espaços topológicos

A noção de variedade começa por uma estrutura puramente topológica. Antes de falar em derivadas, precisamos de saber o que significa uma vizinhança, continuidade e equivalência topológica.

Seja X um conjunto. Uma *topologia* em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos, chamados abertos, tal que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, uniões arbitrárias de abertos são abertas e interseções finitas de abertos são abertas. O par $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico.

Um espaço é *Hausdorff* se, para quaisquer $p \neq q$, existem abertos disjuntos $U \ni p$ e $V \ni q$. Uma aplicação $F : X \rightarrow Y$ é contínua se a imagem inversa de todo aberto de Y é aberta em X ; é um *homeomorfismo* se é bijetiva, contínua e tem inversa contínua. Estas noções permitem formular a geometria local sem recorrer a uma distância.

Recordemos ainda duas propriedades utilizadas nas slides. Um espaço é *conexo* se não pode ser escrito como união de dois abertos disjuntos não vazios. É *normal* se dois fechados disjuntos podem ser separados por dois abertos disjuntos.

Teorema 7.1 (Propriedades dos espaços de Hausdorff). *Seja E um espaço topológico de Hausdorff. Então:*

1. *o limite de uma sucessão convergente é único;*
2. *todo singleton $\{x\}$ é fechado;*
3. *o gráfico de uma função contínua (com contradomínio Hausdorff) é fechado;*
4. *todo subconjunto compacto de E é fechado.*

Estas propriedades serão usadas repetidamente para controlar a passagem do local ao global.

7.2 Coberturas, paracompacidade e partições da unidade

Uma família de abertos $(U_\alpha)_\alpha$ é uma cobertura de X se $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Uma cobertura $(V_\beta)_\beta$ é localmente finita se cada ponto possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito dos V_β .

Um espaço Hausdorff é *paracompacto* se toda cobertura aberta admite um refinamento aberto localmente finito. Esta propriedade é essencial para construir partições da unidade. Uma partição da

unidade subordinada a (U_α) é uma família (ρ_α) de funções contínuas, ou suaves no contexto diferenciável, tal que $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$, $\text{spt } \rho_\alpha \subset U_\alpha$, a família dos suportes é localmente finita e

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha = 1.$$

Ela permite colar construções locais para obter objetos globais.

Mais precisamente, uma cobertura $(V_\beta)_\beta$ é um *refinamento* de $(U_\alpha)_\alpha$ se cada V_β está contido em algum U_α . A paracompacidade exige a existência de um refinamento localmente finito para qualquer cobertura aberta. A local finitude é crucial: perto de cada ponto, apenas um número finito de termos da soma $\sum_{\alpha} \rho_\alpha$ é não nulo, de modo que operações locais podem ser somadas sem criar problemas de convergência.

Nas variedades suaves, escolhem-se as ρ_α suaves. Esta ferramenta reaparecerá no capítulo seguinte na construção de um mergulho euclidiano: as cartas fornecem coordenadas locais e a partição da unidade permite reuni-las numa única aplicação global.

Teorema 7.2 (Consequências de Hausdorff e paracompacidade). *Se E é Hausdorff e paracompacto, então:*

1. *E é normal;*
2. *toda cobertura aberta admite uma partição da unidade subordinada;*
3. *sob a hipótese de numerabilidade das componentes conexas usada nas slides, obtém-se a propriedade de numerabilidade/separabilidade ali enunciada;*
4. *todo subconjunto fechado de E , com a topologia induzida, é Hausdorff e paracompacto.*

Nota 7.3. As slides usam aqui a expressão “completamente separável” e aproximam-na de *second countable*. Mantemos o conteúdo do curso, mas distinguimos terminologicamente segunda contabilidade (existência de uma base numerável) de separabilidade (existência de um subconjunto denso numerável).

7.3 Espaços localmente euclidianos e atlas

Um espaço topológico M é *localmente euclidiano de dimensão m* se cada $p \in M$ possui uma vizinhança aberta U e um homeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m.$$

O par (U, φ) é uma *carta*. Se (U, φ) e (V, ψ) são duas cartas com $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas é

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Dois cartas (U, φ) e (V, ψ) dizem-se *C^k -compatíveis* quando $U \cap V = \emptyset$ ou, se $U \cap V \neq \emptyset$, as aplicações de transição

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

são de classe C^k . Um *atlas de classe C^k* é uma família de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ que cobre M e cujas cartas são duas a duas C^k -compatíveis. Dois atlas são equivalentes quando a sua união é ainda um atlas C^k . O *atlas maximal* associado a $\mathcal{A}$ é a família de todas as cartas compatíveis com $\mathcal{A}$; é este atlas maximal que representa a estrutura diferenciável da variedade.

A condição de Hausdorff assegura a separação de pontos distintos por vizinhanças disjuntas. A *reta com duas origens* é localmente euclidiana, mas falha esta propriedade: quaisquer vizinhanças das duas origens se intersectam. Este exemplo evidencia a necessidade de combinar a estrutura local euclidiana com uma condição global de separação.

7.4 Variedades topológicas e diferenciáveis

Definição 7.4 (Variedade topológica). Seguindo a convenção das slides, uma *variedade topológica* de dimensão m é um espaço topológico localmente euclidiano de dimensão m , Hausdorff e paracompacto.

A dimensão é constante em cada componente conexa; em particular, uma variedade topológica conexa tem dimensão fixa. Uma variedade é metrizável quando a sua topologia é induzida por alguma distância. As slides salientam que as hipóteses de Hausdorff e paracompacidade permitem obter metrizabilidade global, via os teoremas de metrização de Urysohn/Smirnov e a normalidade.

Definição 7.5 (Variedade diferenciável). Uma *variedade diferenciável* é uma variedade topológica cujas mudanças de coordenadas são diferenciáveis; é *suave* quando as mudanças de coordenadas são C^∞ .

Nota 7.6. Outras referências substituem a paracompacidade por segunda contabilidade na definição de variedade. Aqui preservamos a convenção efetivamente usada nas slides do curso.

7.5 Exemplos e contraexemplos

Os abertos de $\mathbb{R}^m$ são variedades de dimensão m . A esfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é uma variedade de dimensão m , embora nenhuma carta a cubra globalmente. Um semidisco é modelo local de uma variedade com bordo. A cúspide parametrizada por (t^3, t^2) exige uma distinção importante: como espaço topológico, a sua imagem é uma variedade topológica de dimensão um (a aplicação $(x, y) \mapsto x^{1/3}$ fornece uma carta), mas a parametrização dada não é regular na origem e não define ali uma imersão suave. Em contraste, a cruz formada por eixos que se intersectam não é localmente euclidiana no ponto de cruzamento. A figura em oito fornece outro contraexemplo discutido nas slides; removendo adequadamente o ponto/ramo responsável pela identificação obtém-se novamente uma subvariedade diferenciável.

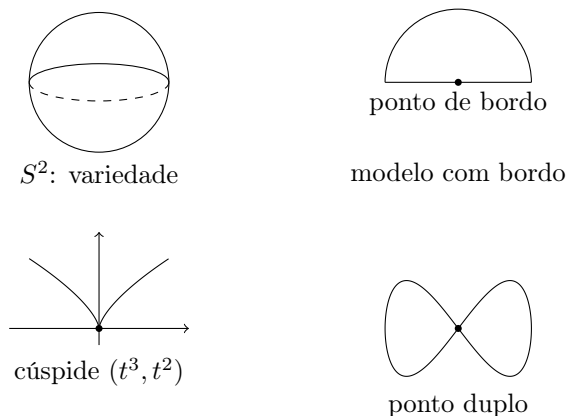


Figura 7.1: Exemplos locais. A esfera é uma variedade sem bordo; o semidisco fornece o modelo local de uma variedade com bordo. A cúspide ilustra que uma imagem pode ser topologicamente uma variedade embora a parametrização escolhida não seja regular; a figura em oito ilustra a obstrução topológica criada por uma identificação no ponto duplo.

7.6 Funções diferenciáveis e espaço tangente

Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma carta (U, φ) com $p \in U$, dizemos que f é diferenciável em p se

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\varphi(p)$ no sentido usual. Para uma aplicação $F : M \rightarrow N$, escolhem-se cartas (U, φ) em torno de p e (V, ψ) em torno de $F(p)$, com $F(U) \subset V$, e exige-se que

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

seja diferenciável em $\varphi(p)$. A independência da escolha das cartas resulta da diferenciabilidade das aplicações de transição.

Definição 7.7 (Derivação em um ponto). Uma *derivação em p* é uma aplicação linear

$$D : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g), \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma curva suave com $\gamma(0) = p$, o seu vetor velocidade em p é

$$X := \gamma'(0) \in T_p M.$$

Este vetor tangente atua sobre cada função $f \in C^\infty(M)$ por

$$Xf := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Esta definição depende apenas do vetor tangente $X = \gamma'(0)$, e não da curva γ escolhida para o representar. A aplicação

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto Xf,$$

é linear e satisfaz a regra de Leibniz

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Portanto, X define uma derivação em p . Reciprocamente, toda derivação em p é determinada por um único vetor $X \in T_p M$. Assim, o espaço tangente pode ser identificado com o espaço das derivações em p :

$$T_p M \simeq \text{Der}_p(C^\infty(M)).$$

Nota 7.8 (Vetores tangentes e derivações). A identificação anterior é canônica. A cada vetor $X \in T_p M$ corresponde a derivação

$$D_X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D_X f := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0},$$

onde $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$; reciprocamente, toda derivação em p determina um único vetor de $T_p M$. Portanto,

$$T_p M \simeq \text{Der}_p(C^\infty(M)).$$

Globalmente, um campo vetorial suave X pode ser visto como uma família suave de derivações X_p , uma em cada ponto. Equivalentemente, X atua sobre funções suaves por

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad f \longmapsto Xf,$$

e satisfaz a regra de Leibniz

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Reciprocamente, toda derivação $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é determinada por um único campo vetorial suave. Assim,

$$\mathfrak{X}(M) \simeq \text{Der}(C^\infty(M)).$$

Esta caracterização será usada mais adiante para definir intrinsicamente o bracket de Lie de dois campos vetoriais. Para esta descrição do espaço tangente e dos campos vetoriais em termos de derivações, veja, por exemplo, Lee e Tu nas referências deste capítulo.

Em coordenadas $(x^1, \dots, x^m)$,

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Esta identificação coincide, para uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$, com o plano tangente construído na Parte A.

Para ver a expressão em coordenadas, escreva $x(t) = \varphi(\gamma(t))$. Então, para $f \in C^\infty(M)$,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \Big|_0 = \sum_{i=1}^m \dot{x}^i(0) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Assim, a carta não define o vetor tangente, mas fornece a sua representação

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_i \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Esta distinção entre objeto intrínseco e componentes locais será essencial quando introduzirmos tensores e conexões.

7.7 Diferencial de uma aplicação

Para $F : M \rightarrow N$ suave, o diferencial em p é a aplicação linear

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, \quad dF_p[\dot{\gamma}(0)] = (F \circ \gamma)'(0).$$

Equivalentemente, $(dF_p X)(f) = X(f \circ F)$. Em cartas, dF_p é representado pela matriz jacobiana da expressão coordenada de F .

Com $x = \varphi \circ \gamma$ e $y = \psi \circ F \circ \gamma$, a regra da cadeia dá

$$\dot{y}(0) = D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \dot{x}(0).$$

Portanto dF_p envia a velocidade de uma curva na velocidade da curva imagem. Esta observação geométrica será a base das definições de rank, imersão e mergulho.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A linguagem moderna das variedades resulta da passagem progressiva da geometria de superfícies para espaços definidos por cartas e mudanças de coordenadas. A formulação topológica e diferenciável torna possível separar a geometria intrínseca de qualquer realização prévia num espaço euclidiano. As partições da unidade constituem uma ferramenta central para transformar dados locais em objetos globais.

Referências do capítulo**Nota bibliográfica**

- J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, New York, 2013.
- L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Universitext, Springer, New York, 2011.
- M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, 1976.
- M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

Capítulo 8

Imersões, mergulhos e teoremas de Whitney

Uma variedade diferenciável foi definida de maneira intrínseca, por cartas e mudanças de coordenadas. Surge agora uma questão natural: em que medida podemos *realizá-la* como um subconjunto regular de um espaço euclidiano? Para responder é necessário distinguir duas exigências. A primeira é diferencial: o aplicação deve conservar todas as direções tangentes, isto é, ter diferencial injetivo. A segunda é topológica: a imagem não deve adquirir identificações ou uma topologia diferente da variedade de partida. Estas duas exigências conduzem, respetivamente, às noções de imersão e de mergulho.

8.1 Rank, imersões e mergulhos

Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Escolham-se cartas (U, φ) em torno de $p \in M$ e (V, ψ) em torno de $F(p)$, e escreva-se

$$\psi_{F\varphi} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

Esta representação local permite transportar para variedades a noção euclidiana de rank.

Definição 8.1 (Rank ou característica). O *rank* de F em p é

$$\text{rank}_p F := \text{rank}_{\varphi(p)}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \text{rank}(dF_p).$$

No caso euclidiano, $\varphi = \psi = \text{Id}$ e

$$\text{rank}_x F = \text{rank} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) \right)_{ij}.$$

Definição 8.2 (Imersão). Seja $F : M^m \rightarrow N^n$, com $m \leq n$, diferenciável. Diz-se que F é uma *imersão* se

$$dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

é injetiva para todo $p \in M$. Equivalentemente,

$$dF_p[u - v] = 0 \implies u = v, \quad \text{rank}_p F = m.$$

Se $m = 1$, esta condição reduz-se a $F'(p) \neq 0$.

Nota 8.3. Nas slides aparece a afirmação de que, em dimensão finita, uma aplicação linear é injetiva se e somente se é bijetiva. Essa equivalência requer que domínio e contradomínio tenham a mesma dimensão. Para $dF_p : T_p M^m \rightarrow T_{F(p)} N^n$, com $m \leq n$, a condição de imersão é precisamente a injetividade, ou seja, $\text{rank } dF_p = m$.

Exemplo 8.4 (Uma imersão que não é injetiva). Considere

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Temos $F(x) = F(x+1)$, logo F não é injetiva. Porém

$$dF_x[u] = 2\pi u(-\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

e $dF_x[u] = 0$ se e somente se $u = 0$. Portanto F é uma imersão. Este exemplo mostra que a condição diferencial de imersão é local e não impede auto-identificações globais.

Definição 8.5 (Mergulho). Uma imersão $F : M \rightarrow N$ é um *mergulho* se

$$F : M \longrightarrow F(M) \subset N$$

é um homeomorfismo, sendo $F(M)$ munido da topologia induzida por N .

Como $F : M \rightarrow F(M)$ é, por definição, sobrejetiva, para obter um mergulho é necessário que seja também injetiva e que a inversa $F^{-1} : F(M) \rightarrow M$ seja contínua. Assim, um mergulho reúne uma condição diferencial (ser imersão) e uma condição topológica (identificar corretamente M com a sua imagem).

Exemplo 8.6 (O duplo cone). Considere

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$

O diferencial é representado por

$$DF(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $r = 0$ a segunda coluna é nula e $\text{rank } DF(0, \theta) = 1$; logo F não é uma imersão no vértice. Além disso,

$$F(0, \theta) = (0, 0, 0) \quad \forall \theta,$$

pelo que também não é injetiva e, portanto, não é um mergulho.

Exemplo 8.7 (O círculo). A inclusão usual

$$\iota : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\cos \theta, \sin \theta) \longmapsto (\cos \theta, \sin \theta),$$

é uma imersão injetiva. Como S^1 é compacto e $\mathbb{R}^2$ é Hausdorff, veremos no teorema seguinte que ι é um mergulho.

Teorema 8.8 (Caracterização de um mergulho). *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável.*

1. *Se F é um mergulho, então $F : M \rightarrow F(M)$ é um difeomorfismo.*
2. *Se M é compacta e F é uma imersão injetiva, então F é um mergulho.*

Demonstração. Para (i), um mergulho é, por definição, um homeomorfismo de M sobre $F(M)$ e uma imersão. A forma local de uma imersão, obtida pelo teorema do rank constante (ou, equivalentemente, pelo teorema da função implícita na forma apropriada), mostra que a inversa é diferenciável nas cartas locais. Logo $F : M \rightarrow F(M)$ é um difeomorfismo.

Para (ii), como F é injetiva, a aplicação $F : M \rightarrow F(M)$ é uma bijeção contínua. Resta provar que F^{-1} é contínua. Seja $A \subset M$ fechado. Como M é compacta, A é compacto. Por continuidade de F , $F(A)$ é compacto. Como N é Hausdorff, todo compacto de N é fechado; em particular, $F(A)$ é fechado em $F(M)$. Mas

$$(F^{-1})^{-1}(A) = F(A).$$

Logo a imagem inversa, por F^{-1} , de todo fechado de M é fechada em $F(M)$, e F^{-1} é contínua. Portanto F é um mergulho. $\square$

Nota 8.9. Usámos o facto elementar de que um fechado A de um espaço compacto M é compacto. De facto, se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de A , então $\mathcal{U} \cup \{M \setminus A\}$ é uma cobertura aberta de M ; uma subcobertura finita de M fornece uma subcobertura finita de A .

Corolário 8.10. *Se $F : M \rightarrow N$ é um mergulho, então*

$$dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} F(M)$$

é um isomorfismo para todo $p \in M$. Em particular,

$$\dim F(M) = \dim M.$$

Exemplo 8.11 (Figura em oito). A figura em oito mostra que injetividade, imersão e mergulho são condições distintas. Uma parametrização imersa pode ter auto-interseções e deixar de ser injetiva. Mesmo restringindo o domínio de modo a obter uma imersão injetiva, a topologia induzida na imagem pode impedir que a aplicação seja um mergulho. Este exemplo será reinterpretado abaixo através da caracterização local das imersões.

8.2 Caracterização local das imersões

A condição de imersão é, por natureza, local. O resultado seguinte quantifica esta afirmação: perto de cada ponto, uma imersão não identifica pontos distintos.

Lema 8.12 (Uma imersão é localmente um mergulho). *Seja M uma variedade sem bordo e $F : M \rightarrow N$ uma imersão de classe C^1 . Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U_p tal que $F|_{U_p} : U_p \rightarrow N$ é um mergulho sobre a sua imagem.*

Demonstração. Fixe-se $p \in M$. Escolham-se cartas (U, φ) em torno de p e (V, ψ) em torno de $F(p)$, e escreva-se

$$f := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 := \varphi(p).$$

Como F é uma imersão, $Df(x_0)$ é injetiva. A função contínua

$$v \in S^{m-1} \longmapsto |Df(x_0)v|$$

é estritamente positiva; como S^{m-1} é compacta,

$$c := \inf_{|v|=1} |Df(x_0)v| > 0.$$

Pela continuidade de Df , podemos escolher uma bola convexa $A' \Subset A$, com $x_0 \in A'$, tal que

$$\|Df(z) - Df(x_0)\| \leq \frac{c}{2} \quad \forall z \in A'.$$

Se $x, y \in A'$, o segmento $y + t(x - y)$ permanece em A' . Para manter rigorosamente a estimativa pretendida nas slides, usamos a fórmula integral ao longo desse segmento:

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(y + t(x - y))(x - y) dt.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y) - Df(x_0)(x - y)| &\leq \int_0^1 \|Df(y + t(x - y)) - Df(x_0)\| |x - y| dt \\ &\leq \frac{c}{2} |x - y|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular inversa,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\geq |Df(x_0)(x - y)| - \frac{c}{2} |x - y| \\ &= \left| Df(x_0) \frac{x - y}{|x - y|} \right| |x - y| - \frac{c}{2} |x - y| \\ &\geq \left(\inf_{|v|=1} |Df(x_0)v| - \frac{c}{2} \right) |x - y| \\ &= \frac{c}{2} |x - y|. \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$: f é injetiva em A' . A forma local de uma imersão mostra então que $F|_{\varphi^{-1}(A')}$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e, portanto, um mergulho local. $\square$

Nota 8.13. Quando $m = n$, uma imersão tem diferencial invertível e é localmente um difeomorfismo entre abertos, pelo teorema da função inversa. Quando $m < n$, a conclusão correta é que ela é localmente um difeomorfismo *sobre a subvariedade imagem*, não sobre um aberto de N .

8.3 Teorema do rank constante

O teorema do rank constante é a ferramenta local que explica geometricamente as imersões e, mais geralmente, as aplicações de rank constante. A sua mensagem é que, depois de mudanças adequadas de coordenadas no domínio e no contradomínio, uma aplicação de rank k não contém localmente mais informação do que a projeção-inclusão linear

$$\pi_k(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

A demonstração será feita em duas etapas: primeiro uma redução linear entre aplicações de mesmo rank; depois uma redução não linear usando o teorema da função inversa. Começemos pela interpretação linear que prepara a demonstração. Para $k \leq \min\{m, n\}$, considere

$$\pi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi_k(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

O teorema afirma que uma aplicação de rank constante k é, localmente e a menos de difeomorfismos no domínio e no contradomínio, equivalente a π_k .

Lema 8.14 (Forma canônica de uma aplicação linear de rank k). *Se V e W são espaços vetoriais de dimensões m e n e $A, B : V \rightarrow W$ têm ambos rank k , existem isomorfismos lineares $P : W \rightarrow W$ e $Q : V \rightarrow V$ tais que*

$$A = P^{-1}BQ.$$

Demonstração. Escolha uma base $\{e_{k+1}, \dots, e_m\}$ de $\ker A$ e uma base $\{f_{k+1}, \dots, f_m\}$ de $\ker B$. Complete-as a bases

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m\}, \quad \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_m\}$$

de V . Defina Q por $Qe_i = f_i$. Se $Qu = 0$ e $u = \sum_i \alpha_i e_i$, então $\sum_i \alpha_i f_i = 0$, donde todos os α_i são nulos. Logo Q é invertível.

Para $1 \leq i \leq k$, ponha

$$z_i = Ae_i, \quad w_i = Bf_i.$$

Como A e B têm rank k , $z_1, \dots, z_k$ e $w_1, \dots, w_k$ são famílias linearmente independentes. Complete-as a bases

$$\{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\}, \quad \{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$$

de W , e defina $Pz_i = w_i$. Então P é invertível. Para $i \leq k$,

$$PAe_i = Pz_i = w_i = Bf_i = BQe_i,$$

e para $i > k$ ambos os membros são nulos. Portanto $PA = BQ$, isto é, $A = P^{-1}BQ$. $\square$

Aplicando o lema a $A = dF_p$ e $B = \pi_k$, vemos já ao nível linear que dF_p pode ser reduzido à projeção-inclusão canônica por mudanças de bases. O teorema seguinte mostra que, sob a hipótese de rank constante, esta normalização linear se prolonga a mudanças de coordenadas não lineares.

Teorema 8.15 (Teorema do rank constante). *Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável de rank constante k numa vizinhança de $p \in M$. Existem cartas locais (U, φ) em torno de p e (V, ψ) em torno de $F(p)$ tais que*

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Consequentemente, a imagem local é uma subvariedade de dimensão k de N .

Demonstração. Como a afirmação é invariante por mudanças de coordenadas, reduzimo-nos a uma aplicação

$$F : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n.$$

Após translações, suponhamos $p = 0$ e $F(0) = 0$. Como $DF(0)$ tem rank k , após permutar coordenadas podemos supor que o menor

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$$

é inversível.

Defina-se

$$\Phi(x^1, \dots, x^m) = (F^1(x), \dots, F^k(x), x^{k+1}, \dots, x^m) =: (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m).$$

A matriz $D\Phi(0)$ tem forma triangular por blocos,

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k},$$

e é portanto invertível. Pelo teorema da função inversa, restringindo as vizinhanças se necessário, Φ é um difeomorfismo local e podemos usar $\tilde{x} = \Phi(x)$ como novas coordenadas no domínio.

Nestas coordenadas,

$$F \circ \Phi^{-1}(\tilde{x}) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x})),$$

onde $\tilde{F}^\alpha = F^\alpha \circ \Phi^{-1}$ para $\alpha > k$.

Como Φ é um difeomorfismo,

$$\text{rank } D(F \circ \Phi^{-1})(\tilde{x}) = k$$

em toda a vizinhança considerada. As primeiras k linhas contêm já o bloco identidade I_k . Se alguma derivada

$$\frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial \tilde{x}^j}, \quad \alpha > k, \quad j > k,$$

fosse não nula, o rank seria pelo menos $k + 1$. Logo

$$\frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial \tilde{x}^j} = 0 \quad (\alpha > k, \quad j > k),$$

e cada $\tilde{F}^\alpha$ depende apenas de $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k)$.

Introduzimos agora a mudança de coordenadas no contradomínio. Defina

$$T(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} + \tilde{F}^{k+1}(y^1, \dots, y^k), \dots, y^n + \tilde{F}^n(y^1, \dots, y^k)).$$

Temos $T(0) = 0$ e

$$DT(0) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

que é invertível. Pelo teorema da função inversa, T^{-1} existe numa vizinhança de 0. Finalmente,

$$\begin{aligned} T^{-1} \circ F \circ \Phi^{-1}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m) \\ = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, 0, \dots, 0) = \pi_k(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Tomando $\varphi = \Phi$ e $\psi = T^{-1}$ (compostas, no caso geral, com as cartas iniciais), obtém-se a forma normal pretendida. $\square$

Assim, localmente,

$$F \sim \pi_k,$$

e uma aplicação de rank constante é equivalente, a menos de difeomorfismos, a uma aplicação linear do mesmo rank. A imagem local

$$F(M) \cap V = \psi^{-1}\{(y^1, \dots, y^k, 0, \dots, 0)\}$$

é uma subvariedade de dimensão k .

8.4 A questão dos mergulhos euclidianos

A distinção entre imersão e mergulho é global. Por exemplo, $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ é uma imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, mas não é injetiva. O duplo cone parametrizado por

$$F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$$

falha mesmo em ser imersão no vértice, onde o diferencial perde rank. A figura em oito fornece outro exemplo importante: conforme o domínio escolhido, pode ser uma imersão injetiva sem ser um mergulho, pois a topologia induzida na imagem não coincide com a do domínio.

Há também uma obstrução dimensional elementar. Uma variedade compacta M^m sem bordo não pode ser imersa em $\mathbb{R}^m$. De facto, se $F : M^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fosse uma imersão, dF_p seria um isomorfismo em todo ponto; pelo teorema da função inversa, F seria localmente um difeomorfismo e, portanto, uma aplicação aberta. Logo $F(M)$ seria aberto em $\mathbb{R}^m$. Mas M compacta implica $F(M)$ compacta, portanto fechada em $\mathbb{R}^m$. Num $\mathbb{R}^m$ conexo, um subconjunto não vazio simultaneamente aberto e fechado teria de ser todo $\mathbb{R}^m$, contradizendo a compacidade.

O resultado precedente é local. A questão global é diferente: dado M^m , existe um espaço $\mathbb{R}^N$ no qual M possa ser representada sem auto-interseções e com a sua estrutura diferenciável preservada? Procuramos, portanto, um mergulho $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, de preferência com N tão pequeno quanto possível. Um tal aplicação transforma a variedade abstrata numa subvariedade euclidiana e permite interpretar os vetores de $T_p M$ como vetores tangentes usuais da imagem. A questão é agora global: dada uma variedade abstrata M^m , pode ela ser realizada como uma subvariedade de algum espaço euclidiano? Procuramos uma aplicação

$$F : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que seja simultaneamente um homeomorfismo sobre a imagem e uma imersão. Isto é precisamente procurar um mergulho. Tal realização permite passar da descrição intrínseca de M a uma geometria extrínseca.

Não se pode, em geral, tomar $N = m$. As slides chamam *fechada* a uma variedade compacta e sem bordo. Antes do resultado geral, consideram ainda o exemplo $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\theta) = \theta^2$: apesar de ser contínua e suave, a identificação $f(\theta) = f(-\theta)$ mostra como uma aplicação global pode perder a estrutura de mergulho.

Definição 8.16 (Variedade fechada). Uma variedade é dita *fechada* quando é compacta e sem bordo.

Lema 8.17 (Não imersão em igual dimensão). Se M é compacta, sem bordo e de dimensão n , não existe uma imersão $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponha que existe. Como dF_p é um isomorfismo em cada ponto, F é localmente um difeomorfismo e portanto uma aplicação aberta. Por outro lado, M é compacta; logo $F(M)$ é compacta e, em $\mathbb{R}^n$, fechada. Assim $F(M)$ é simultaneamente aberta e fechada em $\mathbb{R}^n$. Como $M \neq \emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ é conexo, teríamos $F(M) = \mathbb{R}^n$, impossível porque $F(M)$ é compacta. $\square$

8.5 Teoremas de Whitney

A primeira etapa é mostrar que uma variedade compacta admite algum mergulho euclidiano, sem procurar ainda a dimensão ótima.

Teorema 8.18 (Whitney, forma muito fraca). Se M é uma variedade suave compacta de dimensão m , existe N e um mergulho

$$\Phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Escolha um atlas finito $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e um refinamento finito subordinado, com uma partição da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^k$. Estendendo por zero os produtos $f_\alpha \varphi_\alpha$, defina

$$\Phi(p) = (f_1(p)\varphi_1(p), \dots, f_k(p)\varphi_k(p), f_1(p), \dots, f_k(p)) \in \mathbb{R}^{k(m+1)}.$$

Injetividade. Se $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$, então $f_\alpha(p_1) = f_\alpha(p_2)$ para todo α . Como $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, existe α_0 tal que $f_{\alpha_0}(p_1) = f_{\alpha_0}(p_2) \neq 0$. A igualdade das componentes $f_{\alpha_0}\varphi_{\alpha_0}$ implica $\varphi_{\alpha_0}(p_1) = \varphi_{\alpha_0}(p_2)$, e portanto $p_1 = p_2$.

Injetividade do diferencial. Se $X_p \in T_p M$ e $d\Phi_p[X_p] = 0$, as últimas k componentes dão $df_{\alpha,p}[X_p] = 0$ para todo α . As primeiras componentes reduzem-se então a

$$f_\alpha(p)d\varphi_{\alpha,p}[X_p] = 0.$$

Escolhendo α_0 com $f_{\alpha_0}(p) \neq 0$, obtemos $d\varphi_{\alpha_0,p}[X_p] = 0$. Como φ_{α_0} é uma carta, $X_p = 0$. Logo Φ é uma imersão injetiva; pela compacidade de M , é um mergulho. $\square$

Teorema 8.19 (Whitney – forma super forte). *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$. Então:*

- *existe uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$;*
- *existe um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$;*
- *se M é compacta e orientável, ou compacta com bordo não vazio, ou se $m \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, existe um mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$.*

Os resultados de Whitney refinam fortemente a dimensão ambiente. Na forma clássica que demonstraremos abaixo, uma variedade compacta de dimensão m admite um mergulho em $\mathbb{R}^{2m+1}$ e uma imersão em $\mathbb{R}^{2m}$. Há versões mais fortes que reduzem ainda a dimensão em várias situações.

Entre os exemplos geométricos, o toro mergulha em $\mathbb{R}^3$; a garrafa de Klein admite uma imersão em $\mathbb{R}^3$ mas não um mergulho sem auto-interseção; a fita de Möbius, variedade com bordo, mergulha em $\mathbb{R}^3$; e $\mathbb{RP}^2$ admite a conhecida realização imersa pela superfície de Boy.

É importante distinguir um mergulho de uma parametrização global. Um mergulho identifica M com uma cópia difeomorfa $F(M) \subset \mathbb{R}^N$. Através de dF , os vetores tangentes abstratos podem então ser representados como vetores tangentes euclidianos à subvariedade.

Interpretação euclidiana do mergulho. Quando se fala de mergulhar M em $\mathbb{R}^N$, procura-se uma cópia difeomorfa $F(M) \subset \mathbb{R}^N$ de M ; não se está a afirmar que existe uma única parametrização global de M . Se F é um mergulho, $F(M)$ não apresenta auto-interseções e possui a topologia induzida de $\mathbb{R}^N$. Se dispomos apenas de uma imersão, a imagem pode ter auto-interseções, como acontece nas realizações usuais da garrafa de Klein ou do plano projetivo.

O diferencial dF_p identifica $T_p M$ com um subespaço do espaço tangente euclidiano $T_{F(p)}\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N$. Assim, um vetor tangente, inicialmente definido de maneira intrínseca como derivação, passa a admitir a interpretação clássica de vetor velocidade num espaço euclidiano. Esta identificação prepara a introdução de comprimentos e ângulos no capítulo seguinte.

8.6 Projeções, Sard e redução da dimensão ambiente

Para reduzir a dimensão ambiente, partimos de um mergulho em dimensão grande e projetamos ortogonalmente. Uma direção de projeção é uma reta $[v] \in \mathbb{RP}^{K-1}$; denotemos por

$$\Pi_{[v]} : \mathbb{R}^K \longrightarrow [v]^\perp \simeq \mathbb{R}^{K-1}$$

a projeção ortogonal.

Usaremos o princípio de Sard: se uma aplicação suave parte de uma variedade de dimensão estritamente menor que a do espaço de chegada, a sua imagem é desprezável; na forma geral, o conjunto dos valores críticos de uma aplicação suficientemente regular tem medida nula.

Lema 8.20 (Lema elementar de medida nula). *Seja $f : I = [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 . Se $m < n$, então $f(I)$ tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^n$. Se $m = n$ e $A \subset I$ tem medida nula, então $f(A)$ tem medida nula.*

Lema 8.21 (Sard fraco – baby Sard). *Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação C^1 . Se $m < n$, então $F(M)$ tem medida nula, em cartas de N .*

Corolário 8.22. *Uma curva que preenche uma região de dimensão superior (space-filling) não pode ser de classe C^1 .*

Teorema 8.23 (Sard). *Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação C^k . Sob a hipótese de regularidade $k > m/n - 1$ usada nas notas do curso, a imagem $F(C)$ do conjunto C dos pontos críticos tem medida nula em N .*

Teorema 8.24 (Imersão injetiva por projeção). *Se uma variedade M^m admite uma imersão injetiva*

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^K, \quad K > 2m + 1,$$

então existe uma direção $[v]$ tal que

$$\phi_{[v]} := \Pi_{[v]} \circ \phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{K-1}$$

é ainda uma imersão injetiva.

Demonstração. Há dois conjuntos de direções a evitar.

1. *Secantes.* Se $\phi_{[v]}(p) = \phi_{[v]}(q)$ com $p \neq q$, então

$$[v] = [\phi(p) - \phi(q)].$$

Considere

$$\alpha : (M \times M) \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{RP}^{K-1}, \quad \alpha(p, q) = [\phi(p) - \phi(q)].$$

O domínio tem dimensão $2m < K - 1$. Pelo teorema de Sard, a imagem de α é desprezável. Fora dessa imagem, a projeção é injetiva.

2. *Direções tangentes.* Se $d\phi_{[v],p}[X_p] = 0$ para algum $X_p \neq 0$, então

$$[v] = [d\phi_p(X_p)].$$

Restringindo aos vetores tangentes unitários, definimos o *fibrado tangente unitário*

$$UTM := \{(p, X_p) \in TM : \|X_p\|_g = 1\}.$$

Como cada fibra é uma esfera S^{m-1} , tem-se $\dim UTM = 2m - 1$. Considere então

$$\beta : UTM \longrightarrow \mathbb{RP}^{K-1}, \quad \beta(p, X_p) := [d\phi_p(X_p)].$$

Como $2m - 1 < K - 1$, a imagem de β é também desprezável. Fora dessa imagem, a projeção continua a ser uma imersão.

A união dos dois conjuntos excepcionais é desprezável; existe portanto uma direção $[v]$ que evita ambos. $\square$

Para a imersão, basta evitar as direções tangentes. Assim, se M^m admite uma imersão em $\mathbb{R}^{2m+1}$, uma projeção genérica fornece uma imersão em $\mathbb{R}^{2m}$.

Corolário 8.25 (Redução da dimensão para imersões). *Se M^m admite uma imersão em $\mathbb{R}^{2m+1}$, então admite uma imersão em $\mathbb{R}^{2m}$.*

Demonstração. Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ uma imersão e $\phi_{[v]} = \Pi_{[v]} \circ \phi$. Uma direção $[v] \in \mathbb{RP}^{2m}$ é má para a imersão precisamente quando existe $p \in M$ e $0 \neq X_p \in T_p M$ com

$$d\phi_{[v],p}(X_p) = \Pi_{[v]}(d\phi_p X_p) = 0,$$

isto é, $[v] = [d\phi_p X_p]$. Restringindo aos vetores unitários, considere

$$\bar{\beta} : UM = \{(p, X_p) : \|X_p\| = 1\} \longrightarrow \mathbb{RP}^{2m}, \quad (p, X_p) \longmapsto [d\phi_p X_p].$$

O domínio tem dimensão $2m - 1$, enquanto $\mathbb{RP}^{2m}$ tem dimensão $2m$. Pelo Sard fraco, a imagem de $\bar{\beta}$ é desprezável. Existe portanto uma direção fora dessa imagem, e a projeção correspondente continua a ser uma imersão. $\square$

Teorema 8.26 (Whitney, forma clássica). *Se M é uma variedade compacta de dimensão m , então existe um mergulho*

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$$

e uma imersão

$$M \looparrowright \mathbb{R}^{2m}.$$

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

Os teoremas de Whitney estabeleceram uma ponte fundamental entre a definição intrínseca de variedade diferenciável e a sua realização em espaços euclidianos. A prova por projeções genéricas põe em evidência o papel do teorema de Sard: as direções de projeção que produzem auto-interseções ou degenerescência do diferencial formam conjuntos excepcionais de medida nula.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

- H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), 645–680.
 A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 883–890.
 M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, 1976.
 J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Springer, 2013.

Capítulo 9

Geometria Riemanniana: métricas, isometrias e mergulhos isométricos

Uma variedade diferenciável fornece espaços tangentes $T_p M$, mas não fornece, por si só, comprimentos nem ângulos. Em cada espaço tangente podemos escolher bases e coordenadas, porém os números obtidos não têm ainda significado métrico intrínseco. A geometria Riemanniana começa quando se acrescenta, ponto a ponto e de maneira suave, um produto interno.

9.1 Métricas Riemannianas

Definição 9.1 (Métrica Riemanniana). Uma métrica Riemanniana numa variedade suave M é uma família $g = (g_p)_{p \in M}$ tal que cada

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é bilinear, simétrica e definida positiva, e cujas componentes em qualquer carta variam suavemente com o ponto.

Numa carta $(x^1, \dots, x^m)$, escrevemos

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad g(u, v) = g_{ij} u^i v^j.$$

A matriz (g_{ij}) é simétrica e definida positiva. Em $\mathbb{R}^m$ com coordenadas cartesianas, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

É importante separar duas situações. Uma carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ não determina por si só uma métrica em U : uma métrica é uma estrutura geométrica adicional. Uma imersão num espaço euclidiano fornece, por outro lado, uma métrica natural. Se

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

é uma imersão e e denota a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^N$,

$$e(a, b) := a \cdot b,$$

define-se em M a métrica induzida

$$(F^*e)_p(u, v) := e_{F(p)}(dF_p(u), dF_p(v)) = dF_p(u) \cdot dF_p(v).$$

A notação F^*e designa o *pullback* da métrica euclidiana e pela aplicação F . Geometricamente, dF_p transporta os vetores tangentes $u, v \in T_pM$ para

$$dF_p(u), dF_p(v) \in T_{F(p)}\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N,$$

onde o produto escalar euclidiano está definido. O pullback consiste em medir u e v através das suas imagens por dF_p : ele “traz para trás” a métrica e de $\mathbb{R}^N$ para M . Em particular,

$$\|u\|_{F^*e} = \|dF_p(u)\|_{\mathbb{R}^N},$$

pelo que os comprimentos e os ângulos em M são os comprimentos e os ângulos das respectivas imagens infinitesimais por F .

Em coordenadas,

$$(F^*e)_{ij} = \partial_i F \cdot \partial_j F.$$

É exatamente a primeira forma fundamental da Parte A, agora formulada para uma variedade de dimensão arbitrária. Se M já está munida de uma métrica riemanniana g , a condição

$$F^*e = g$$

significa precisamente que F preserva o produto escalar dos vetores tangentes. Neste caso, F é uma *imersão isométrica*.

9.2 Isometrias Riemannianas

Definição 9.2 (Isometria Riemanniana). Uma aplicação suave $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é uma isometria local quando

$$h_{F(p)}(dF_p u, dF_p v) = g_p(u, v)$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$. Equivalentemente, $F^*h = g$.

Se F é uma imersão em $\mathbb{R}^N$, a condição de ser isométrica é

$$\partial_i F \cdot \partial_j F = g_{ij}.$$

Esta equação é a forma local do problema de mergulho isométrico.

Convém distinguir esta noção infinitesimal da noção global de espaços métricos. Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos, uma aplicação $F : X \rightarrow Y$ preserva globalmente a distância quando

$$d_Y(F(p), F(q)) = d_X(p, q), \quad p, q \in X.$$

Quando é bijetiva, chama-se uma isometria entre os espaços métricos. Uma isometria Riemanniana preserva o comprimento de todas as curvas; sob as hipóteses globais adequadas, preserva também a distância Riemanniana.

9.3 Comprimento e distância Riemanniana

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é C^1 , a sua velocidade é $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ e define-se

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Esta definição é independente da parametrização regular orientada. Para p, q na mesma componente conexa, define-se

$$d_g(p, q) = \inf\{L_g(\gamma) : \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

A positividade de g implica $d_g(p, q) \geq 0$ e, localmente, a equivalência de g com a métrica euclidiana mostra que $d_g(p, q) = 0$ apenas quando $p = q$. A simetria resulta da curva percorrida em sentido inverso e a desigualdade triangular da concatenação de curvas. Assim, d_g é a distância Riemanniana.

Definição 9.3 (Aplicação curta e imersão curta). Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ diz-se *curta* se

$$F^*h \leq g$$

como formas quadráticas, isto é,

$$h_{F(p)}(dF_p X, dF_p X) \leq g_p(X, X), \quad p \in M, \quad X \in T_p M.$$

Se F é uma imersão, diz-se uma *imersão curta*. Quando a desigualdade é estrita para todo $X \neq 0$,

$$F^*h < g,$$

diz-se que a imersão é *estritamente curta*. Esta é a condição utilizada na formulação abaixo do teorema de Nash–Kuiper.

Se $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é isométrica, então

$$L_h(F \circ \gamma) = L_g(\gamma),$$

pois

$$h(dF\dot{\gamma}, dF\dot{\gamma}) = g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Esta identidade explica por que a condição $F^*h = g$ é a noção correta de preservação infinitesimal da geometria.

9.4 Mergulhos isométricos: de Whitney a Nash

O teorema de Whitney responde a uma questão diferencial-topológica: uma variedade suave pode ser realizada em algum $\mathbb{R}^N$. Mas um mergulho de Whitney não tem razão para preservar uma métrica previamente dada. A questão de Nash é mais forte:

dado (M, g) , existe $F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $F^*e = g$?

Se $F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ verifica apenas

$$F_0^*e < g$$

como formas quadráticas, diz-se que é uma imersão *curta*. Intuitivamente, a imagem tem comprimentos infinitesimais menores do que os prescritos por g ; falta acrescentar comprimento sem deslocar demasiado a superfície.

Teorema 9.4 (Nash–Kuiper (1954/56), forma C^1). *Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^k , $k \geq 3$, munida de uma métrica Riemanniana suave g_M , e seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq m + 1$, uma imersão estritamente curta, $f^*e < g_M$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem imersões $f_\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tais que*

$$f_\varepsilon^*e = g_M, \quad \|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon \quad \text{em } M.$$

Assim, f_ε é uma imersão isométrica Riemanniana arbitrariamente próxima de f na topologia C^0 .

A imagem do projeto Hévêa. O exemplo geométrico apresentado no curso começa com uma folha que se enrola num cilindro e procura depois transformar esse cilindro num toro sem esticar nem rasgar o material. A aparente impossibilidade resulta do contraste entre os comprimentos das circunferências interior e exterior do toro. O fenómeno C^1 de Nash–Kuiper permite, porém, introduzir uma sucessão de corrugações cada vez mais finas: a superfície permanece próxima da forma inicial, enquanto o defeito isométrico é progressivamente corrigido. O projeto Hévêa produziu em 2012 uma visualização computacional deste processo.



Figura 9.1: Sequência de corrugações apresentada nas slides para ilustrar a realização C^1 de Nash–Kuiper: o cilindro é progressivamente deformado em direção a um toro sem alterar a métrica intrínseca no limite.

Teorema 9.5 (Nash – mergulho isométrico suave). *Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^k , $k \geq 3$, munida de uma métrica Riemanniana suave g_M . Existe um mergulho isométrico $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Na estimativa dimensional apresentada nas slides,*

$$n = (m + 1) \frac{m(3m + 11)}{2},$$

e, se M é compacta, pode tomar-se

$$n = \frac{m(3m + 11)}{2}.$$

A condição isométrica é

$$g_M(u, v)_p = df_p[u] \cdot df_p[v].$$

Nota 9.6. O primeiro resultado exprime a flexibilidade C^1 de Nash–Kuiper; o segundo é o teorema de mergulho isométrico suave de Nash. A condição $f^*e = g_M$ preserva comprimentos e ângulos dos vetores tangentes. Trata-se de uma isometria Riemanniana infinitesimal; não se deve confundi-la, sem hipóteses adicionais, com uma isometria bijetiva entre os espaços métricos globais.

O teorema de Nash–Kuiper mostra a extraordinária flexibilidade da categoria C^1 : sob as hipóteses

clássicas do teorema, uma imersão curta pode ser aproximada por imersões isométricas C^1 . O mecanismo geométrico é a introdução de oscilações ou corrugações cada vez mais finas. Elas aumentam o comprimento infinitesimal enquanto a aplicação permanece próxima da imersão curta inicial. Esta flexibilidade contrasta fortemente com a teoria suave, onde as equações de mergulho isométrico são muito mais rígidas.

O teorema de Nash para mergulhos isométricos suaves estabelece, por outro lado, que toda variedade Riemanniana suave admite uma realização isométrica em algum espaço euclidiano de dimensão suficientemente grande. A mensagem conceptual é portanto:

Whitney realiza a estrutura diferenciável; Nash realiza também a métrica.

9.5 Comprimentos preservados e coordenadas na imagem

Se $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um mergulho, podemos identificar localmente M com $\xi(M)$. As funções coordenadas ambientes $\bar{x}^A = \xi^A(p)$ restringem-se à imagem, enquanto uma carta $(x^1, \dots, x^m)$ fornece uma base tangente

$$\partial_i \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^i}.$$

O teorema do rank constante permite escolher coordenadas ambientes adaptadas à imagem, nas quais a subvariedade é localmente dada por

$$y^{m+1} = \dots = y^N = 0.$$

Se, além disso, ξ é isométrica, então

$$g_{ij} = \partial_i \xi \cdot \partial_j \xi,$$

e o comprimento intrínseco de qualquer curva coincide com o comprimento euclidiano da sua imagem.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

Whitney mostrou que a estrutura diferenciável abstrata pode ser realizada num espaço euclidiano. Nash introduziu uma mudança de perspectiva decisiva: realizar simultaneamente a variedade e uma métrica prescrita. O teorema C^1 de Nash e Kuiper tornou-se um paradigma de flexibilidade geométrica e está na origem das técnicas modernas de integração convexa.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

- J. Nash, *C^1 isometric imbeddings*, Ann. of Math. 60 (1954), 383–396.
 N. H. Kuiper, *On C^1 -isometric imbeddings I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 58 (1955), 545–556.
 J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 63 (1956), 20–63.
 C. Villani, *Les prodigieux théorèmes de Monsieur Nash*, conférence, Bibliothèque nationale de France, 7 avril 2010.
 M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

Capítulo 10

Tensores, conexões e derivação covariante

Numa variedade, vetores situados em pontos diferentes pertencem a espaços vetoriais diferentes:

$$u \in T_p M, \quad v \in T_q M, \quad p \neq q.$$

Não existe, em geral, uma identificação canônica entre $T_p M$ e $T_q M$. Por conseguinte, não há uma maneira intrínseca de formar $v - u$, de declarar que um vetor permaneceu constante ao longo de uma curva ou de diferenciar diretamente um campo vetorial.

Em $\mathbb{R}^m$, esta dificuldade fica escondida porque todos os espaços tangentes se identificam naturalmente com o mesmo espaço vetorial $\mathbb{R}^m$. Uma *conexão* fornece a estrutura adicional que permite comparar infinitesimalmente vetores em pontos vizinhos e definir a derivação covariante. Permite também transportar vetores ao longo de uma curva escolhida; em geral, o resultado depende dessa curva.

10.1 Vetores, covetores e tensores

10.1.1 Do objeto geométrico às suas componentes

Fixemos $p \in M$ e escrevamos $V = T_p M$, com $\dim V = n$. Um vetor pertence a V ; um covetor pertence ao dual V^* , isto é, é uma aplicação linear $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$. Se (e_i) é uma base de V , a base dual (e^i) satisfaz $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Escrevemos

$$v = v^i e_i, \quad \omega = \omega_i e^i, \quad \omega(v) = \omega_i v^i.$$

Adotamos a convenção de Einstein: um índice repetido uma vez em cima e uma vez em baixo é somado. Em coordenadas locais, $e_i = \partial/\partial x^i$ e $e^i = dx^i$.

A avaliação $\omega(v)$ é independente da base. As componentes de v e de ω mudam de modo complementar, conservando o valor desta avaliação. Esta é uma primeira manifestação da invariância tensorial.

10.1.2 Definição multilinear e campos tensoriais

Definição 10.1 (Tensor de tipo (r, s)). Um tensor de tipo (r, s) sobre V é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ fatores}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, $T \in V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$. Para $(r, s) = (0, 0)$, um tensor é um número real, chamado *escalar*. A ordem total é $r + s$.

Num campo tensorial de tipo $(0, 0)$, este número depende do ponto e define uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor é independente das coordenadas escolhidas.

Um vetor é identificado com um tensor de tipo $(1, 0)$ pela aplicação $\alpha \mapsto \alpha(v)$; um covetor tem tipo $(0, 1)$; uma forma bilinear tem tipo $(0, 2)$. Um *endomorfismo* de V é uma aplicação linear $L : V \rightarrow V$, isto é, uma aplicação linear de um espaço vetorial nele próprio. A cada endomorfismo $L : V \rightarrow V$ associamos um tensor T_L de tipo $(1, 1)$, definido por

$$T_L(\alpha, v) := \alpha(Lv), \quad \alpha \in V^*, \quad v \in V.$$

Esta aplicação é linear em cada argumento e determina inteiramente L : conhecer $\alpha(Lv)$ para todos os covetores α permite recuperar o vetor Lv .

A métrica é um tensor simétrico positivo definido de tipo $(0, 2)$.

Em componentes,

$$T = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}.$$

Um *campo tensorial suave* associa a cada $p \in M$ um tensor sobre $T_p M$, com componentes suaves em cada carta. Não é necessária uma conexão para definir um campo tensorial; a conexão intervém na sua derivação covariante.

10.1.3 Mudança de base e contração

Se $e'_i = B^j_i e_j$, com $B \in GL(n, \mathbb{R})$, então

$$e'^i = (B^{-1})^i_j e^j, \quad v'^i = (B^{-1})^i_j v^j, \quad \omega'_i = B^j_i \omega_j.$$

Cada índice superior transforma-se por B^{-1} e cada índice inferior por B :

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = (B^{-1})^{i_1}_{a_1} \dots (B^{-1})^{i_r}_{a_r} \cdot B^{b_1}_{j_1} \dots B^{b_s}_{j_s} T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}.$$

Para bases coordenadas, $B^j_i = \partial x^j / \partial x'^i$. Esta lei exprime, em componentes, a independência do objeto relativamente à base.

A *contração* de um índice superior com um índice inferior usa a avaliação canónica $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e produz um tensor de tipo $(r-1, s-1)$. A métrica permite também baixar ou levantar índices:

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad \omega^i = g^{ij} \omega_j, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Nota 10.2 (Mudanças entre bases ortonormadas). Se as duas bases são ortonormadas relativamente ao mesmo produto interno, a matriz de mudança de base B é ortogonal:

$$B^{-1} = B^T.$$

Escrevendo as componentes em colunas, as leis de transformação são

$$[v'] = B^{-1}[v], \quad [\omega'] = B^T[\omega].$$

Assim, neste caso, as componentes dos vetores e dos covetores obedecem à mesma lei numérica de transformação.

Esta coincidência não elimina a distinção entre os objetos: um vetor pertence a V , enquanto um covetor pertence a V^* e é uma aplicação linear de V em $\mathbb{R}$.

Se as bases forem apenas ortogonais, mas não ortonormadas, a matriz B não é necessariamente ortogonal e as duas leis de transformação podem ser diferentes.

10.1.4 Invariantes tensoriais: traço, determinante e métrica

Importa distinguir uma quantidade numérica de um *escalar intrínseco*: um número calculado numa base pode mudar quando a base muda.

Endomorfismos: transformação por semelhança. Se $L(e_j) = L^i_j e_i$, a sua matriz transforma-se segundo

$$L' = B^{-1}LB.$$

Consequentemente,

$$\boxed{\operatorname{tr} L' = \operatorname{tr} L, \quad \det L' = \det L.}$$

O traço L^i_i é uma contração tensorial. O determinante também é um escalar intrínseco. Com efeito, pela multiplicatividade do determinante,

$$\det L' = \det(B^{-1}LB) = \det(B^{-1}) \det L \det B = \det L.$$

Os fatores associados à mudança de base na entrada e na saída compensam-se.

Formas bilineares: transformação por congruência. Para $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, com $b_{ij} = b(e_i, e_j)$,

$$b'_{ij} = B^k_i B^\ell_j b_{k\ell}, \quad b' = B^\top b B.$$

Logo,

$$\boxed{\det b' = (\det B)^2 \det b.}$$

O determinante da matriz de uma forma bilinear não é, em geral, um escalar intrínseco. Em particular, $\det(g_{ij})$ depende da base, embora a métrica seja intrínseca. Uma forma bilinear define uma aplicação $V \rightarrow V^*$; ao contrário de um endomorfismo, a entrada e a saída não pertencem ao mesmo espaço.

Exemplo 10.3 (A mesma métrica em duas bases). Em $V = \mathbb{R}^2$, seja g o produto interno euclidiano. Na base usual, $[g] = I$ e $\det[g] = 1$. Na base $e'_1 = 2e_1$, $e'_2 = e_2$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g]' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det[g]' = 4.$$

Por outro lado, a identidade $L = \operatorname{Id}_V$ tem matriz I em ambas as bases, com traço 2 e determinante 1. A soma dos coeficientes diagonais da métrica passa de 2 a 5; também ela não é um escalar intrínseco.

Levantar um índice para construir invariantes. Uma métrica g associa a qualquer forma bilinear b o único endomorfismo L definido por

$$b(u, v) = g(u, Lv), \quad u, v \in V.$$

Esta convenção dá, mesmo quando b não é simétrica,

$$L^i_j = g^{ik} b_{kj}, \quad [L] = [g]^{-1} [b].$$

Assim,

$$\boxed{\operatorname{tr} L = g^{ij} b_{ij}, \quad \det L = \frac{\det[b]}{\det[g]}.$$

Ambas as expressões são *escalares intrínsecos*, isto é, os seus valores são independentes da base escolhida.

No traço, usamos a simetria de g^{ij} ; a contração de índices garante a invariância. No quociente dos determinantes, os fatores $(\det B)^2$ do numerador e do denominador cancelam-se. Assim, embora $\det[b]$ e $\det[g]$ não sejam, em geral, escalares intrínsecos, o seu quociente é. A soma $\sum_i b_{ii}$ coincide com o traço métrico numa base g -ortonormada, mas não numa base arbitrária.

Para $b = g$, obtém-se $L = \text{Id}_V$: o traço métrico é n e o determinante relativo é 1. Numa superfície, a segunda forma fundamental e a métrica determinam, com a convenção de sinal adotada para o operador de Weingarten, o endomorfismo cujos autovalores são as curvaturas principais; o seu determinante é a curvatura de Gauss.

Ligação à mecânica e ao volume. Em dimensão três, os invariantes principais de um endomorfismo são

$$I_1 = \text{tr } L, \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } L)^2 - \text{tr}(L^2)), \quad I_3 = \det L.$$

Estes invariantes intervêm na descrição das deformações e nas leis constitutivas isotrópicas. Quando a grandeza é inicialmente descrita por uma forma bilinear, a métrica fornece o endomorfismo associado.

O fator $\sqrt{\det(g_{ij})}$ transforma-se por $|\det B|$. Em coordenadas, esta transformação compensa a de $|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$, produzindo a densidade de volume intrínseca

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|.$$

Numa variedade orientada, a orientação permite representá-la pela forma de volume. O desenvolvimento desta construção será retomado no capítulo dedicado ao volume e aos operadores de Hodge.

Nota 10.4 (Critério geométrico). O facto de uma expressão assumir um valor real não garante que seja um tensor de tipo $(0,0)$. É a independência da base, expressa pela lei de transformação, que permite reconhecer um escalar intrínseco. Devemos distinguir o determinante de um endomorfismo do determinante da matriz de uma forma bilinear.

10.2 Conexão e símbolos de Christoffel

Numa base coordenada $g_i = \partial_i$, uma conexão é determinada pelos coeficientes Γ_{ij}^k definidos por

$$\nabla_{g_j} g_i = \Gamma_{ij}^k g_k.$$

Estes coeficientes dependem das coordenadas. Para compreender essa dependência, consideremos primeiro coordenadas cartesianas $(x^1, \dots, x^m)$ e coordenadas curvilíneas $(s^1, \dots, s^m)$. Se $g_k = \partial x / \partial s^k$ e (g^i) é a base dual, então

$$\Gamma_{nk}^i = g^i \cdot \partial_n g_k = \sum_p \frac{\partial s^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial s^n \partial s^k}.$$

Diferenciando a identidade

$$\delta_k^i = \sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^k}$$

em relação a s^n , obtemos a expressão alternativa

$$\Gamma_{nk}^i = - \sum_{l,m} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}. \quad (10.1)$$

10.2.1 Lei de transformação

Se $(s^{i'})$ é um segundo sistema de coordenadas, os coeficientes transformam-se segundo

$$\Gamma_{n'k'}^{i'} = \frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i} \left(\Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} \right).$$

A presença do termo com segundas derivadas distingue a lei de transformação dos símbolos de Christoffel da lei tensorial.

Demonstração. Pela expressão anterior,

$$\Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} = - \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$$

Por outro lado, aplicando a regra da cadeia a $s^i = s^i(x(s'))$,

$$\frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} = \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$$

Somando as duas identidades, os termos com $\partial^2 s^i / \partial x^l \partial x^m$ cancelam. Multiplicando por $\partial s^{i'} / \partial s^i$ resta

$$\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}},$$

que é precisamente $\Gamma_{n'k'}^{i'}$ na nova base. □

10.2.2 A conexão como estrutura geométrica

A lei precedente sugere uma definição intrínseca: uma conexão afim é uma operação $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ que é $C^\infty(M)$ -linear no primeiro argumento, $\mathbb{R}$ -linear no segundo e satisfaz

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

Escolhida uma base coordenada, toda a conexão é codificada pelos Γ_{ij}^k . A conexão é uma estrutura independente da métrica; em particular, os seus coeficientes não têm de ser simétricos nos índices inferiores.

10.3 Derivação covariante de vetores e covetores

Definição 10.5 (Derivação covariante de tensores). Uma operação de derivação covariante (ou conexão diferencial) consiste na escolha de uma conexão Γ e de operadores lineares L_k sobre tensores tais que: $L_k f = \partial_k f$ para escalares; sobre vetores e covetores atua pelas fórmulas de conexão; e satisfaz a regra de Leibniz

$$L_k(U \otimes V) = L_k U \otimes V + U \otimes L_k V.$$

Escrevemos $L_k = \nabla_k^\Gamma$.

Definição 10.6 (Derivada covariante sem coordenadas). Para campos vetoriais u, v, w, z e funções suaves $f, g \in C^\infty(M)$, a derivada covariante $D_v w$ é $\mathbb{R}$ -linear no campo derivado e $C^\infty(M)$ -

linear na direção. Mais precisamente,

$$D_{fv+gu}w = fD_vw + gD_uw,$$

enquanto, no campo que é derivado,

$$D_v(fw + gz) = v(f)w + v(g)z + fD_vw + gD_vz.$$

Em particular,

$$D_v(fw) = v(f)w + fD_vw.$$

Assim, a conexão é tensorial na direção v , mas atua como uma derivação no campo w . Na base coordenada, $D_{g_j}g_i = \Gamma_{ij}^k g_k$ determina então toda a operação.

Se $w = w^i g_i$, então

$$\nabla_{g_k}w = \partial_k w^i g_i + w^i \nabla_{g_k}g_i = (\partial_k w^i + \Gamma_{jk}^i w^j) g_i.$$

Portanto

$$\boxed{\nabla_k w^i = \partial_k w^i + \Gamma_{jk}^i w^j.}$$

Para um covetor $\omega = \omega_i g^i$, a identidade $g^i[g_j] = \delta_j^i$ implica

$$\nabla_k g^i = -\Gamma_{jk}^i g^j,$$

e daí

$$\boxed{\nabla_k \omega_i = \partial_k \omega_i - \Gamma_{ik}^j \omega_j.}$$

Estas fórmulas exprimem a correção introduzida pelos termos de Christoffel nas derivadas ordinárias, de modo que o resultado se transforme tensorialmente sob mudança de coordenadas.

Dedução pela covariância. Em coordenadas cartesianas, as componentes do gradiente de u são $\partial u^l / \partial x^j$. Exigindo que o mesmo objeto seja um tensor de tipo $(1, 1)$ em coordenadas (s^i) ,

$$\hat{u}^i{}_{;k} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial u^l}{\partial x^j}.$$

Como $\hat{u}^i = u^l \partial s^i / \partial x^l$, a regra da cadeia dá

$$\hat{u}^i{}_{;k} = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - \hat{u}^n \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}.$$

Usando a fórmula (10.1) para Γ_{nk}^i , obtemos novamente

$$\hat{u}^i{}_{;k} = \partial_k \hat{u}^i + \Gamma_{nk}^i \hat{u}^n.$$

10.4 Torção

A lei de transformação dos símbolos de Christoffel contém derivadas segundas das mudanças de coordenadas; por isso os Γ_{ij}^k não são as componentes de um tensor. A parte antissimétrica, porém, transforma-se tensorialmente. Isto conduz à torção. A assimetria dos coeficientes inferiores define a torção. Intrinsecamente,

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Em uma base coordenada, $[g_i, g_j] = 0$, e portanto

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}$$

com esta ordem de índices. Equivalentemente, se se adotar a convenção oposta para T^k_{ij} , todas as fórmulas subseqüentes devem mudar de sinal de modo consistente. Nas presentes notas manteremos a definição intrínseca acima.

Para uma família de curvas $\gamma(t, s)$, escrevendo $T = \partial_t \gamma$ e $S = \partial_s \gamma$, tem-se

$$D_t S - D_s T = T(T, S),$$

pois $[T, S] = 0$ para os campos coordenados associados aos parâmetros (t, s) .

10.5 Derivada ao longo de curvas, transporte paralelo e geodésicas

Definição 10.7 (Derivada covariante direcional). Se $\xi = \xi^k g_k$ e $w = w^i g_i$, define-se

$$\nabla_\xi^\Gamma w := D_\xi w = \xi^k \nabla_k^\Gamma w = (\xi^k \nabla_k^\Gamma w^i) g_i.$$

Uma conexão torna possível derivar um campo $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ mesmo que os valores de V pertençam a espaços tangentes diferentes. Em coordenadas,

$$D_t V = \left(\frac{dV^k}{dt} + \dot{\gamma}^j V^i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Esta expressão é intrínseca apesar de cada termo separado depender das coordenadas. Se $\gamma : I \rightarrow M$ e $V(t) = V^k(t) g_k$ é um campo ao longo de γ , define-se

$$D_t V = \nabla_{\dot{\gamma}} V = \left(\frac{dV^k}{dt} + \dot{\gamma}^j V^i \Gamma_{ij}^k \right) g_k.$$

Um campo é paralelo ao longo de γ se $D_t V = 0$. Em geometria curvilínea, as componentes V^k podem variar, pois a própria base varia ao longo da curva.

Definição 10.8 (Geodésica de uma conexão). Seja ∇ uma conexão em M e

$$\gamma : I \rightarrow M$$

uma curva suave. O seu campo velocidade é $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$. Como definido anteriormente, a conexão permite derivar campos vetoriais ao longo de γ . Em particular, podemos derivar o próprio campo velocidade na direção da curva, obtendo a *aceleração covariante*

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} := \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}.$$

A curva γ chama-se uma *geodésica da conexão* ∇ se

$$\boxed{\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.}$$

Assim, uma geodésica é uma curva cujo vetor velocidade é paralelo ao longo da própria curva. Com efeito, pela definição anterior de transporte paralelo, um campo V ao longo de γ é paralelo quando

$$\frac{DV}{dt} = 0.$$

Tomando $V = \dot{\gamma}$, obtém-se precisamente a equação das geodésicas. Em coordenadas,

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \iff \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k(\gamma)\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0.$$

O transporte paralelo e a noção de geodésica dependem apenas da conexão. Só depois de escolher uma conexão relacionada com a métrica é que se obtém a geometria Riemanniana habitual das geodésicas.

10.6 Derivação covariante de tensores

A conexão estende-se a todos os tensores impondo a regra de Leibniz e compatibilidade com contrações. Para um tensor contravariante de ordem dois,

$$U = U^{ij}\partial_i \otimes \partial_j,$$

temos

$$\nabla_k U^{ij} = \partial_k U^{ij} + \Gamma_{\ell k}^i U^{\ell j} + \Gamma_{\ell k}^j U^{i\ell}.$$

Para um tensor covariante de ordem dois,

$$\nabla_k U_{ij} = \partial_k U_{ij} - \Gamma_{ik}^\ell U_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell U_{i\ell},$$

e para um tensor misto,

$$\nabla_\ell U^i_k = \partial_\ell U^i_k + \Gamma_{p\ell}^i U^p_k - \Gamma_{k\ell}^p U^i_p.$$

Os sinais correspondem à transformação contravariante ou covariante de cada índice. A derivada covariante estende-se a tensores pela regra de Leibniz. Para um tensor contravariante de ordem dois,

$$U = U^{ij}g_i \otimes g_j,$$

temos

$$\nabla_k U^{ij} = \partial_k U^{ij} + \Gamma_{lk}^i U^{lj} + \Gamma_{lk}^j U^{il}.$$

Com efeito,

$$\nabla_k (U^{ij}g_i \otimes g_j) = (\partial_k U^{ij})g_i \otimes g_j + U^{ij}\nabla_k g_i \otimes g_j + U^{ij}g_i \otimes \nabla_k g_j,$$

e a fórmula resulta de $\nabla_k g_i = \Gamma_{ik}^l g_l$ após renomear índices.

Para um tensor covariante U_{ij} ,

$$\nabla_k U_{ij} = \partial_k U_{ij} - \Gamma_{ik}^l U_{lj} - \Gamma_{jk}^l U_{il},$$

e, para um tensor misto,

$$\nabla_l U^i_k = \partial_l U^i_k + \Gamma_{pl}^i U^p_k - \Gamma_{kl}^p U^i_p.$$

A regra geral é simples: cada índice contravariante produz um termo $+\Gamma$ e cada índice covariante um termo $-\Gamma$.

Gradiente covariante de um tensor. Se

$$U = U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} g_{i_1} \otimes \dots \otimes g_{i_r} \otimes g^{j_1} \otimes \dots \otimes g^{j_s},$$

então a conexão atua pela regra de Leibniz em cada fator. O gradiente covariante é o tensor de tipo $(r, s + 1)$

$$\nabla U = (\nabla_k U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}) g_{i_1} \otimes \dots \otimes g^{j_s} \otimes g^k.$$

Em particular,

$$\nabla_k U^{ij} = \partial_k U^{ij} + \Gamma_{\ell k}^i U^{\ell j} + \Gamma_{\ell k}^j U^{i \ell},$$

$$\nabla_k U_{ij} = \partial_k U_{ij} - \Gamma_{ik}^\ell U_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell U_{i \ell},$$

e

$$\nabla_\ell U^i_k = \partial_\ell U^i_k + \Gamma_{p\ell}^i U^p_k - \Gamma_{k\ell}^p U^i_p.$$

Teorema 10.9 (Derivada covariante de um tensor $(2, 0)$). *Para $U = U^{ij} g_i \otimes g_j$,*

$$\nabla_k U = (\partial_k U^{ij} + \Gamma_{\ell k}^i U^{\ell j} + \Gamma_{\ell k}^j U^{i \ell}) g_i \otimes g_j.$$

Demonstração. Pela regra de Leibniz,

$$\nabla_k (U^{ij} g_i \otimes g_j) = (\partial_k U^{ij}) g_i \otimes g_j + U^{ij} (\nabla_k g_i) \otimes g_j + U^{ij} g_i \otimes (\nabla_k g_j).$$

Usando $\nabla_k g_i = \Gamma_{ik}^\ell g_\ell$ e mudando os nomes dos índices mudos obtém-se a fórmula anunciada. $\square$

10.7 Compatibilidade métrica e conexão de Levi-Civita

Uma conexão é compatível com g quando

$$\nabla g = 0, \quad \text{isto é,} \quad \nabla_k g_{ij} = 0.$$

Neste caso a derivação respeita o produto interno:

$$X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Ao longo de uma curva,

$$\frac{d}{dt} g(U, V) = g(D_t U, V) + g(U, D_t V).$$

Consequentemente, se U e V são paralelos, $g(U, V)$ é constante; o transporte paralelo preserva comprimentos e ângulos.

Teorema 10.10 (Levi-Civita). *Para toda métrica Riemanniana g existe uma única conexão sem torção e compatível com g . Em coordenadas,*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{i \ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

Demonstração. Baixemos o primeiro índice, $\Gamma_{k;ij} = g_{k\ell} \Gamma_{ij}^\ell$. A compatibilidade métrica dá

$$0 = \nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell g_{i \ell},$$

ou seja,

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk}. \quad (\text{A})$$

Permutando ciclicamente os índices,

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki}, \quad (\text{B})$$

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij}. \quad (\text{C})$$

Como a conexão é sem torção, $\Gamma_{ij}^\ell = \Gamma_{ji}^\ell$. Somando (B)+(C)-(A), os termos adequados cancelam e resulta

$$2\Gamma_{k;ij} = \partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Finalmente, multiplicando por $g^{k\ell}$,

$$\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} g^{\ell k} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

A fórmula determina a conexão univocamente e, por construção, fornece uma conexão simétrica compatível com g . $\square$

Lema 10.11 (Conservação do produto interno). *Seja ∇ uma conexão compatível com g , não necessariamente simétrica. Se ξ e η são campos vetoriais transportados paralelamente ao longo de uma curva γ , então*

$$\frac{d}{dt} g(\xi, \eta) = 0.$$

Demonstração. A compatibilidade métrica dá

$$\frac{d}{dt} g(\xi, \eta) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}} \eta) = 0,$$

pois ambos os campos são paralelos. Note-se que não se usou a simetria da conexão. $\square$

Conexões métricas com torção. Se ∇ é outra conexão compatível com g , pode escrever-se

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{LC} Y + K(X, Y),$$

onde K é o tensor de contorsão. A torção mede a parte antissimétrica de K :

$$T(X, Y) = K(X, Y) - K(Y, X).$$

Assim, entre as conexões métricas, a condição $T = 0$ seleciona exatamente a conexão de Levi-Civita.

10.8 Conexão plana e preparação para a curvatura

Definição 10.12 (Conexão Euclidiana ou afim, no sentido das slides). Uma conexão Γ é dita Euclidiana (ou afim) numa vizinhança quando existe um sistema de coordenadas nessa vizinhança no qual $\Gamma_{ij}^k = 0$ identicamente.

Nesse caso

$$\nabla_i = \partial_i.$$

Pelo lema de Schwarz, as derivadas covariantes comutam:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) U = 0.$$

Isto sugere a pergunta que conduz ao capítulo seguinte: o que mede, numa conexão geral, a falha de comutação das derivadas covariantes? A resposta será o tensor de curvatura de Riemann, juntamente com um termo de torção quando esta não é nula.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A noção de transporte paralelo foi sistematizada por Levi-Civita no início do século XX. A formulação moderna separa três estruturas que em exemplos elementares aparecem frequentemente misturadas: a estrutura diferenciável, a métrica e a conexão. A conexão de Levi-Civita é precisamente o ponto de encontro entre as duas últimas: é a única conexão simultaneamente métrica e sem torção.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

T. Levi-Civita, “Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana”, 1917.
M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser.
B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko e S. P. Novikov, *Modern Geometry – Methods and Applications, Part I*.

Capítulo 11

Curvatura de Riemann

No final do capítulo anterior vimos que, numa conexão plana, podem escolher-se coordenadas nas quais $\Gamma = 0$ numa vizinhança e, portanto, as derivadas covariantes segundas comutam. A questão natural é medir precisamente a falha desta comutação numa conexão geral. É desta pergunta que nasce o tensor de curvatura de Riemann.

11.1 Comutador das derivadas covariantes

Se $w = w^i \partial_i$, então

$$\nabla_k w^i = \partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q.$$

Como $U^i_k := \nabla_k w^i$ é um tensor do tipo $(1, 1)$, a fórmula do capítulo anterior dá

$$\begin{aligned} \nabla_l \nabla_k w^i &= \partial_l (\partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q) + \Gamma_{pl}^i (\partial_k w^p + \Gamma_{qk}^p w^q) \\ &\quad - \Gamma_{kl}^p (\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q). \end{aligned}$$

Expandindo,

$$\begin{aligned} \nabla_l \nabla_k w^i &= \partial_l \partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i \partial_l w^q + \Gamma_{pl}^i \partial_k w^p + (\partial_l \Gamma_{qk}^i) w^q \\ &\quad + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p w^q - \Gamma_{kl}^p (\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q). \end{aligned}$$

Trocando k e l e subtraindo, os termos simétricos cancelam-se. Obtemos

$$(\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) w^i = T^p_{lk} \nabla_p w^i + R^i_{qlk} w^q,$$

onde, com a convenção destas notas,

$$T^p_{lk} = \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p$$

e

$$R^i_{qlk} = \partial_l \Gamma_{qk}^i - \partial_k \Gamma_{ql}^i + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p.$$

Assim, a não comutação possui duas origens distintas: a torção e a curvatura. Para a conexão de Levi-Civita, $T = 0$, e resta

$$(\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) w^i = R^i_{qlk} w^q.$$

Lema 11.1. *Se $R^i_{qkl} \neq 0$, então a conexão não é Euclidiana numa vizinhança e as derivadas covariantes segundas não comutam.*

Demonstração. É a contraposição imediata da fórmula do comutador: numa conexão Euclidiana em uma vizinhança, $\Gamma = 0$ e as derivadas reduzem-se às derivadas parciais, que comutam. $\square$

11.2 Antissimetria, identidade de Bianchi e simetrias

Teorema 11.2 (Antissimetria e identidade de Bianchi). *Temos sempre*

$$R^i_{qkl} = -R^i_{qlk}.$$

Se a conexão é simétrica, vale ainda a primeira identidade de Bianchi,

$$R^i_{qkl} + R^i_{klq} + R^i_{lqk} = 0.$$

Demonstração. É suficiente verificar a identidade numa base coordenada. Tomando $w = \partial_p$ e usando a fórmula do comutador,

$$(\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) \partial_p = -R^i_{pkl} \partial_i$$

com a convenção de índices adotada. Somando ciclicamente em p, k, l , o membro direito corresponde à soma cíclica das diferenças

$$\nabla_l(\nabla_k \partial_p - \nabla_p \partial_k) + \nabla_k(\nabla_p \partial_l - \nabla_l \partial_p) + \nabla_p(\nabla_l \partial_k - \nabla_k \partial_l).$$

Como a torção é nula, $\nabla_k \partial_p = \nabla_p \partial_k$ numa base coordenada. Cada parêntese é nulo, e a soma cíclica de R desaparece. $\square$

Para a conexão de Levi-Civita, baixamos o primeiro índice:

$$R_{jqkl} = g_{ji} R^i_{qkl}.$$

Lema 11.3 (Simetrias do tensor de Riemann). *Para a conexão de Levi-Civita, além da antissimetria nos dois últimos índices, temos*

$$R_{jqkl} = -R_{qjkl}, \quad R_{jqkl} = R_{kljq}.$$

Demonstração. As slides demonstram explicitamente a primeira destas identidades. Fixando k, l e escrevendo $A = \nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l$, temos a partir da compatibilidade métrica. Fixando k, l e escrevendo $A = \nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l$, temos

$$g(Aw, w) = R_{jqkl} w^q w^j.$$

Por outro lado, como $\nabla g = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l g(w, w) &= 2g(\nabla_k \nabla_l w, w) + 2g(\nabla_l w, \nabla_k w), \\ \partial_l \partial_k g(w, w) &= 2g(\nabla_l \nabla_k w, w) + 2g(\nabla_k w, \nabla_l w). \end{aligned}$$

Subtraindo e usando Schwarz, $g(Aw, w) = 0$. Por polarização, $R_{jqkl} + R_{qjkl} = 0$. A segunda simetria é registada nas slides como parte do lema e segue das simetrias anteriores juntamente com Bianchi. $\square$

11.3 Bracket de Lie e formulação intrínseca

A expressão anterior foi obtida em coordenadas. Para formular curvatura e torção sem escolher uma carta, começamos pelo bracket de Lie. Se U, V são campos vetoriais, define-se

$$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf), \quad f \in C^\infty(M).$$

Embora UV e VU separadamente não sejam, em geral, derivações, a diferença é. Com efeito,

$$[U, V](fg) = g[U, V]f + f[U, V]g,$$

isto é, $[U, V]$ satisfaz a regra de Leibniz. Pela caracterização dos campos vetoriais como derivações de $C^\infty(M)$, estabelecida no Capítulo 7, $[U, V]$ define portanto um campo vetorial em M .

Lema 11.4 (Comutador em coordenadas). *Numa base holonómica, se*

$$U = U^i \partial_i, \quad V = V^i \partial_i,$$

então

$$[U, V] = (U^i \partial_i V^j - V^i \partial_i U^j) \partial_j.$$

Demonstração. Aplicando $UV - VU$ a uma função suave, os termos com segundas derivadas cancelam-se pelo lema de Schwarz, restando exatamente a expressão indicada. $\square$

Em particular $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Uma base com esta propriedade chama-se holonómica; numa base geral, o bracket dos vetores de base pode não desaparecer.

Teorema 11.5 (Da expressão indicial à formulação intrínseca). *Numa carta local $(x^1, \dots, x^n)$, escreva*

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ji}^k \partial_k.$$

Com a convenção de índices destas notas, as componentes da torção e da curvatura são

$$T^p_{lk} = \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p$$

e

$$R^i_{qlk} = \partial_l \Gamma_{qk}^i - \partial_k \Gamma_{ql}^i + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p.$$

Estas expressões coordenadas correspondem exatamente às fórmulas intrínsecas

$$T(\xi, \eta) = \nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta + [\xi, \eta]$$

e

$$R[\xi, \eta]\zeta = (\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi)\zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta.$$

Mais precisamente, para a base coordenada,

$$T(\partial_k, \partial_l) = T^p_{lk} \partial_p, \quad R[\partial_k, \partial_l] \partial_q = R^i_{qkl} \partial_i = -R^i_{qlk} \partial_i.$$

Assim, as fórmulas indiciais são as componentes, numa carta, dos objetos geométricos definidos pelas fórmulas intrínsecas.

Demonstração. Começemos pela torção. Se

$$\xi = \xi^i \partial_i, \quad \eta = \eta^j \partial_j,$$

então, pela regra de Leibniz da conexão,

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \xi &= \eta^j \nabla_{\partial_j} (\xi^i \partial_i) \\ &= \eta^j (\partial_j \xi^i) \partial_i + \eta^j \xi^i \Gamma_{ij}^p \partial_p, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \xi^i \nabla_{\partial_i} (\eta^j \partial_j) \\ &= \xi^i (\partial_i \eta^j) \partial_j + \xi^i \eta^j \Gamma_{ji}^p \partial_p. \end{aligned}$$

Por outro lado, a fórmula coordenada do bracket dá

$$[\xi, \eta] = (\xi^i \partial_i \eta^p - \eta^i \partial_i \xi^p) \partial_p.$$

Substituindo na expressão intrínseca da torção,

$$T(\xi, \eta) = \nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta + [\xi, \eta],$$

os termos que contêm derivadas das componentes de ξ e η cancelam-se. Depois de renomear índices mudos, resta

$$T(\xi, \eta) = \xi^k \eta^l (\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p) \partial_p.$$

Portanto

$$\boxed{T^p_{lk} = \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p.}$$

Em particular, tomando $\xi = \partial_k$ e $\eta = \partial_l$, obtemos

$$T(\partial_k, \partial_l) = \nabla_l \partial_k - \nabla_k \partial_l = (\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p) \partial_p,$$

pois $[\partial_k, \partial_l] = 0$. Isto estabelece explicitamente a passagem entre a fórmula intrínseca e a fórmula indicial da torção.

Passemos à curvatura. Tomemos primeiro três vetores da base coordenada,

$$\xi = \partial_k, \quad \eta = \partial_l, \quad \zeta = \partial_q.$$

Como $[\partial_k, \partial_l] = 0$, a definição intrínseca reduz-se a

$$R[\partial_k, \partial_l] \partial_q = (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) \partial_q.$$

Pela definição dos símbolos de Christoffel,

$$\nabla_l \partial_q = \Gamma_{ql}^m \partial_m.$$

Aplicando ∇_k e usando novamente a regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l \partial_q &= \nabla_k (\Gamma_{ql}^m \partial_m) \\ &= (\partial_k \Gamma_{ql}^m) \partial_m + \Gamma_{ql}^m \nabla_k \partial_m \\ &= (\partial_k \Gamma_{ql}^n) \partial_n + \Gamma_{ql}^m \Gamma_{mk}^n \partial_n \\ &= (\partial_k \Gamma_{ql}^n + \Gamma_{ql}^m \Gamma_{mk}^n) \partial_n. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\nabla_l \nabla_k \partial_q = (\partial_l \Gamma_{qk}^n + \Gamma_{qk}^m \Gamma_{ml}^n) \partial_n.$$

Subtraindo,

$$R[\partial_k, \partial_l] \partial_q = (\partial_k \Gamma_{ql}^n - \partial_l \Gamma_{qk}^n + \Gamma_{ql}^m \Gamma_{mk}^n - \Gamma_{qk}^m \Gamma_{ml}^n) \partial_n.$$

Esta é a mesma informação que a expressão indicial introduzida anteriormente, com a ordem dos dois últimos índices determinada pela convenção adotada. Com a notação deste capítulo, a expressão calculada é precisamente

$$\boxed{R[\partial_k, \partial_l] \partial_q = R^n_{qkl} \partial_n.}$$

De facto, trocando k e l na fórmula indicial fixada anteriormente,

$$R^n_{qkl} = \partial_k \Gamma_{ql}^n - \partial_l \Gamma_{qk}^n + \Gamma_{mk}^n \Gamma_{ql}^m - \Gamma_{ml}^n \Gamma_{qk}^m,$$

que coincide com o coeficiente obtido acima (os produtos escalares dos coeficientes de Christoffel comutam). Pela antissimetria nos dois últimos índices,

$$R^n_{qkl} = -R^n_{qlk}.$$

Assim, a ordem dos argumentos $R[\partial_k, \partial_l]$ corresponde à ordem (k, l) dos dois últimos índices de R^n_{qkl} .

Resta explicar por que a verificação sobre os vetores coordenados basta. Tanto T como R são $C^\infty(M)$ -lineares em cada argumento. Assim, se

$$\xi = \xi^k \partial_k, \quad \eta = \eta^l \partial_l, \quad \zeta = \zeta^q \partial_q,$$

então

$$T(\xi, \eta) = \xi^k \eta^l T(\partial_k, \partial_l)$$

e

$$R[\xi, \eta]\zeta = \xi^k \eta^l \zeta^q R[\partial_k, \partial_l]\partial_q.$$

Logo, conhecer T^p_{lk} e R^i_{qkl} numa carta equivale a conhecer os tensores T e R nessa carta. As fórmulas intrínsecas definem os objetos geométricos; as fórmulas indiciais são as suas representações em coordenadas. $\square$

Nota 11.6 (Sobre a convenção de sinais e índices). A literatura utiliza várias convenções para a ordem dos argumentos de R e, conseqüentemente, para a ordem dos dois últimos índices de R^i_{qkl} . Nestas notas mantém-se a convenção fixada acima. O ponto essencial é conservar simultaneamente a definição intrínseca e a correspondente fórmula indicial; a antissimetria nos dois primeiros argumentos de $R[\xi, \eta]$ traduz-se na antissimetria dos dois índices correspondentes.

Se $[\xi, \eta] = 0$, as fórmulas anteriores reduzem-se a

$$R[\xi, \eta]\zeta = (\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi)\zeta, \quad T[\xi, \eta] = \nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta,$$

como salientado nas slides.

11.4 Bases holonómicas e anholonómicas

Uma base coordenada $g_k = \partial/\partial x^k$ é dita *holonómica*; nela $[g_i, g_j] = 0$. Uma base geral $\{e_i\}$ não tem de provir de coordenadas e é então, em geral, *anholonómica*. Com a convenção destas notas, a expressão da torção contém também o termo de anholonomia:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} + [e_i, e_j]^k.$$

Escreva

$$e_l = \alpha^m_l g_m, \quad g_n = \bar{\alpha}^p_n e_p, \quad e^m = \bar{\alpha}^m_n dx^n,$$

com matrizes inversas α e $\bar{\alpha}$. Então

$$de^m = \partial_l \bar{\alpha}^m_q dx^l \wedge dx^q.$$

Por outro lado,

$$[e_l, e_c] = (\alpha^p_l \partial_p \alpha^n_c - \alpha^p_c \partial_p \alpha^n_l) \bar{\alpha}^m_n e_m.$$

Combinando as duas expressões obtém-se

$$de^m = -\frac{1}{2} [e_l, e_c]^m e^l \wedge e^c.$$

Em particular, para a co-base coordenada $e^m = dx^m$, temos $de^m = 0$ e o bracket dos vetores de base desaparece.

Operador de curvatura ao longo de uma curva. Para uma curva $t \mapsto \gamma(t)$, defina

$$R_X := R[\dot{\gamma}, X]\dot{\gamma}.$$

Pelas simetrias do tensor de curvatura de Levi-Civita, este operador é auto-adjunto:

$$(R_X, Y)_g = (R_Y, X)_g.$$

Esta propriedade será usada no estudo dos campos de Jacobi.

11.5 Dimensão dois e Theorema Egregium

Em dimensão $m = 2$, as simetrias do tensor de Riemann deixam essencialmente uma única componente independente. Consideremos uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ e, em torno de p , uma representação em gráfico

$$(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2)),$$

escolhida de modo que p corresponda à origem e o eixo x^3 seja normal ao plano tangente. Assim,

$$f(0) = 0, \quad \partial_i f(0) = 0.$$

A métrica induzida é

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f,$$

logo

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(0) = 0.$$

Pela fórmula de Levi-Civita, $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$, e portanto no ponto considerado

$$R^i_{\ell k}(0) = \partial_\ell \Gamma_{qk}^i(0) - \partial_k \Gamma_{q\ell}^i(0).$$

Baixando o primeiro índice e usando $\partial g(0) = 0$, obtemos

$$R_{iq\ell k}(0) = \partial_\ell \Gamma_{ik}(0) - \partial_k \Gamma_{iq\ell}(0),$$

onde, no ponto,

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Teorema 11.7 (Theorema Egregium de Gauss). *Para uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$, em coordenadas ortonormais no ponto como acima,*

$$K(p) = R_{1212}(p) = R_{2121}(p).$$

Em particular, a curvatura de Gauss é uma grandeza intrínseca.

Demonstração. Substituindo a expressão de Γ_{kij} na fórmula de R e particularizando os índices, obtém-se

$$R_{1212}(0) = \frac{1}{2}\{-\partial_{22}g_{11} - \partial_{11}g_{22} + 2\partial_{12}g_{12}\}(0).$$

Como $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ e $\nabla f(0) = 0$,

$$\partial_{22}g_{11}(0) = 2f_{12}(0)^2, \quad \partial_{11}g_{22}(0) = 2f_{12}(0)^2,$$

e

$$\partial_{12}g_{12}(0) = f_{11}(0)f_{22}(0) + f_{12}(0)^2.$$

Consequentemente,

$$R_{1212}(0) = f_{11}(0)f_{22}(0) - f_{12}(0)^2 = \det D^2 f(0).$$

Nestas coordenadas $\det g(0) = 1$, e a segunda forma fundamental no ponto é representada por $D^2 f(0)$. Assim,

$$R_{1212}(0) = \frac{\det II(0)}{\det I(0)} = K(p).$$

Como o tensor de Riemann da conexão de Levi-Civita depende apenas da métrica, K é intrínseca. $\square$

11.6 Curvaturas de Ricci e escalar

Contraindo o tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci

$$\text{Ric}_{ij} = R^k_{ikj},$$

e uma nova contração fornece a curvatura escalar

$$\text{Scal} = g^{ij} \text{Ric}_{ij}.$$

Em dimensão dois, toda a curvatura é determinada por K e

$$\boxed{\text{Scal} = 2K.}$$

Lema 11.8 (Curvaturas escalar e de Gauss). *Se M tem dimensão dois, então $\text{Scal} = 2K$ em cada ponto.*

Demonstração. No ponto escolhem-se coordenadas ortonormais. As simetrias de R deixam $R_{1212} = R_{2121} = K$ e $R_{1221} = R_{2112} = -K$. Contraindo,

$$\text{Scal} = g^{ij} g^{kl} R_{likj} = 2K.$$

Como ambos os membros são escalares, a igualdade vale em qualquer sistema de coordenadas. $\square$

Estas contrações tornam-se fundamentais em dimensões superiores, onde já não existe uma única curvatura gaussiana capaz de codificar todo o tensor R .

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A curvatura de Riemann generaliza para dimensões arbitrárias a descoberta intrínseca de Gauss. As identidades algébricas do tensor e as suas contrações, desenvolvidas no século XIX, fornecem a linguagem que liga a geometria local à análise global e, mais tarde, à relatividade geral.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854.
M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.

Capítulo 12

Campos de Jacobi

A curvatura de Riemann mede a não comutação das derivadas covariantes. Os campos de Jacobi dão-lhe uma interpretação dinâmica: descrevem, ao longo de uma geodésica, a separação infinitesimal entre geodésicas vizinhas.

12.1 Variações de geodésicas

Considere uma aplicação suave

$$\gamma : (t, s) \mapsto \gamma(t, s) \in M$$

e os campos ao longo da superfície parametrizada

$$T = \partial_t \gamma, \quad S = \partial_s \gamma.$$

Para uma conexão sem torção, os campos coordenados comutam e vale o seguinte resultado.

Lema 12.1. *Para qualquer campo V ao longo da variação,*

$$(D_s D_t - D_t D_s)V = R(S, T)V.$$

Demonstração. Em coordenadas, escreve-se

$$D_s D_t V = \partial_s \partial_t V^k \partial_k + \partial_t V^k D_s \partial_k + \partial_s V^k D_t \partial_k + V^k D_s D_t \partial_k,$$

e uma expressão análoga para $D_t D_s V$. Os termos com derivadas ordinárias cancelam-se e resta precisamente a ação da curvatura sobre V . $\square$

A fórmula é a versão ao longo da variação da identidade do capítulo anterior.

12.2 Equação de Jacobi

Teorema 12.2 (Equação de Jacobi). *Se $t \mapsto \gamma(t)$ é uma geodésica e J é o campo variacional proveniente de uma variação por geodésicas, então*

$$D_t^2 J = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}.$$

Demonstração. Suponha que, para cada s , $t \mapsto \gamma(t, s)$ é uma geodésica. Então

$$D_t T = 0.$$

Derivando em s ,

$$0 = D_s D_t T.$$

Pelo lema anterior,

$$D_s D_t T = D_t D_s T + R(S, T)T.$$

Como a torção é nula, $D_s T = D_t S$. Portanto

$$0 = D_t D_t S + R(S, T)T,$$

ou, usando a antissimetria de R nos dois primeiros argumentos segundo a convenção adotada,

$$\boxed{D_t^2 J = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}},$$

onde $J(t) = S(t, 0)$ é o *campo de Jacobi* associado à variação. □

Em coordenadas geodésicas centradas em p , considere a variação

$$\gamma(t, s) = \exp_p(t(V + sW)).$$

Então $J(0) = 0$ e

$$D_t J(0) = W.$$

No modelo plano, $R = 0$ e a equação reduz-se a $D_t^2 J = 0$: geodésicas vizinhas separam-se linearmente. A curvatura é exatamente o termo que modifica esta separação.

12.3 Derivadas de $g(J, J)$

Para tornar quantitativa esta observação, ponha

$$f(t) = g(J(t), J(t)).$$

Como a conexão é métrica,

$$f' = 2g(D_t J, J).$$

Usando a equação de Jacobi,

$$f'' = 2g(RJ, J) + 2g(D_t J, D_t J),$$

onde abreviamos $RJ := R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}$. Derivando novamente,

$$f^{(3)} = 2g((D_t R)J, J) + 8g(RD_t J, J).$$

Uma nova derivação dá

$$f^{(4)} = 2g((D_t^2 R)J, J) + 12g((D_t R)D_t J, J) + 8g(RJ, RJ) + 8g(RD_t J, D_t J).$$

Se $J(0) = 0$ e $D_t J(0) = W$, então

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2g(W, W), \quad f^{(3)}(0) = 0,$$

e

$$f^{(4)}(0) = 8g(RW, W) = -8g(R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W).$$

A derivada seguinte fornece, com as mesmas convenções,

$$f^{(5)}(0) = -20g((D_t R)(\dot{\gamma}, W)W, \dot{\gamma}).$$

Estas identidades mostram explicitamente em que ordem a curvatura e a sua derivada entram na expansão da métrica.

12.4 Aproximação da métrica pela curvatura

Teorema 12.3 (Aproximação da métrica pela curvatura). *Em coordenadas geodésicas centradas em p ,*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}(p)x^k x^l - \frac{1}{6}(\nabla_m R_{iklj})(p)x^k x^l x^m + O(|x|^4).$$

Demonstração. Escolha coordenadas normais em p , de modo que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ e as geodésicas radiais sejam linhas $t \mapsto tx$. Para $W = W^i \partial_i$, considere o campo de Jacobi proveniente da variação das geodésicas radiais. Então

$$f(t) = t^2 g_{ij}(tx) W^i W^j.$$

Por Taylor,

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^5 \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} t^\alpha + O(t^6).$$

Substituindo as derivadas anteriores,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \delta_{ij} W^i W^j - \frac{8}{4!} R_{iklj} x^k x^l W^i W^j t^4 \\ &\quad - \frac{20}{5!} (\nabla_m R_{iklj}) x^k x^l x^m W^i W^j t^5 + O(t^6 |x|^4). \end{aligned}$$

Como $8/4! = 1/3$ e $20/5! = 1/6$, tomando $t = 1$ obtemos

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}(p)x^k x^l - \frac{1}{6}(\nabla_m R_{iklj})(p)x^k x^l x^m + O(|x|^4).$$

□

12.5 Leitura geométrica

Em coordenadas normais, a métrica é euclidiana no ponto e as suas primeiras derivadas desaparecem. O primeiro desvio intrínseco da geometria euclidiana aparece, portanto, na ordem quadrática e é governado pelo tensor de Riemann. A ordem cúbica é governada pela derivada covariante da curvatura. Esta expansão fecha o percurso iniciado com Gauss: além da sua interpretação através de uma imersão, a curvatura controla diretamente a maneira como a própria métrica se afasta localmente da geometria plana.

12.6 Uma abertura aos sistemas integráveis

A geometria diferencial fornece também a linguagem natural para formular princípios fundamentais da dinâmica. Apresentamos aqui apenas as noções de integral primeira, independência funcional e involução, suficientes para compreender o ponto de partida do teorema de Arnold–Liouville. O objetivo não é desenvolver a teoria dos sistemas hamiltonianos, mas mostrar como conceitos já introduzidos para variedades, campos vetoriais e diferenciais de funções reaparecem num problema dinâmico.

12.6.1 Integrais primeiras e independência funcional

Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Uma trajetória do sistema definido por X é uma curva γ tal que $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$.

Definição 12.4 (Integral primeira). Uma função $F \in C^\infty(M)$ chama-se *integral primeira* de X se é constante ao longo das suas trajetórias. Equivalentemente,

$$XF = dF(X) = 0.$$

De facto, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = dF_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = XF(\gamma(t)).$$

Exemplo 12.5 (Rotação no plano). Em $\mathbb{R}^2$, considere

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad F(x, y) := x^2 + y^2.$$

Então $XF = -2xy + 2xy = 0$. Logo F é uma integral primeira e as trajetórias permanecem nos conjuntos de nível $F^{-1}(c)$, que para $c > 0$ são circunferências.

Definição 12.6 (Independência funcional). As funções $F_1, \dots, F_k \in C^\infty(M)$ dizem-se *funcionalmente independentes* em $p \in M$ se

$$dF_1(p), \dots, dF_k(p) \in T_p^*M$$

são linearmente independentes. Equivalentemente, a aplicação $F := (F_1, \dots, F_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ tem posto k em p .

Se $c \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular, o teorema do valor regular mostra que $F^{-1}(c)$ é uma subvariedade de codimensão k . Se todos os F_i são integrais primeiras, cada trajetória que começa em $F^{-1}(c)$ permanece nesse nível comum.

12.6.2 Involução e o teorema de Arnold–Liouville

Para formular a segunda noção é necessária uma estrutura adicional. Uma *variedade simplética* é uma variedade M de dimensão par $2n$ munida de uma 2-forma ω fechada e não degenerada. O cálculo das formas diferenciais será desenvolvido na Parte C; aqui antecipamos apenas esta estrutura.

A cada $F \in C^\infty(M)$ associa-se o campo hamiltoniano X_F , definido, com a convenção aqui adotada, por

$$\iota_{X_F}\omega = dF.$$

A não degenerescência de ω garante a existência e unicidade de X_F . Para $F, G \in C^\infty(M)$ define-se o *crochet de Poisson*

$$\{F, G\} := \omega(X_F, X_G).$$

Assim, $X_GF = dF(X_G) = \{F, G\}$.

Definição 12.7 (Funções em involução). Duas funções $F, G \in C^\infty(M)$ dizem-se *em involução* se

$$\{F, G\} = 0.$$

Uma família $F_1, \dots, F_n$ está em involução se $\{F_i, F_j\} = 0$ para todos os i, j .

A condição $\{F_i, F_j\} = 0$ significa, em particular, que F_i é constante ao longo do fluxo hamiltoniano de F_j . Os campos hamiltonianos correspondentes comutam, o que permite construir uma ação local de $\mathbb{R}^n$ nos níveis comuns.

Teorema 12.8 (Arnold–Liouville, forma geométrica). *Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética e sejam $F_1, \dots, F_n \in C^\infty(M)$ funções funcionalmente independentes e duas a duas em involução. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular e suponha que uma componente conexa N_c de $F^{-1}(c)$ é compacta. Então*

$$N_c \simeq \mathbb{T}^n.$$

Mais precisamente, os campos $X_{F_1}, \dots, X_{F_n}$ geram em N_c uma ação de $\mathbb{R}^n$ e existe um reticulado $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$N_c \simeq \mathbb{R}^n / \Gamma \simeq \mathbb{T}^n.$$

Localmente em torno desse toro existem coordenadas de ação–ângulo, nas quais os movimentos hamiltonianos integráveis se tornam lineares nas variáveis angulares.

O mecanismo geométrico pode ser lido diretamente nas hipóteses. A independência dos dF_i produz um nível comum de dimensão n ; a involução torna os X_{F_i} tangentes a esse nível e faz com que comutem; os seus fluxos definem uma ação de $\mathbb{R}^n$. Na componente compacta e conexa, os períodos formam um reticulado Γ de posto n , e o quociente $\mathbb{R}^n / \Gamma$ é um toro.

Esta abertura mostra como noções locais — diferenciais, independência linear no cotangente, campos vetoriais e fluxos — se combinam para produzir uma conclusão global sobre a topologia de uma variedade invariante. É também neste sentido que o teorema de Arnold–Liouville constitui um exemplo particularmente rico de uma demonstração que pode servir de fio condutor para introduzir progressivamente os conceitos que utiliza.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A equação de Jacobi descreve a linearização da equação geodésica e fornece uma das interpretações mais eficazes da curvatura: a curvatura controla a separação de geodésicas infinitamente próximas. Os campos de Jacobi são também a ferramenta natural para estudar pontos conjugados e o diferencial da aplicação exponencial.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.

Parte III

Formas diferenciais e cálculo exterior

Capítulo 13

Álgebra exterior e formas diferenciais

13.1 Da geometria multilinear às formas

As variedades diferenciáveis fornecem o espaço geométrico e os espaços tangentes $T_p M$ fornecem a estrutura linear local. As formas diferenciais são os objetos que permitem combinar esta estrutura com operações intrínsecas de derivação e integração. O objetivo desta parte é construir a sequência

$$\text{álgebra exterior} \longrightarrow \text{formas diferenciais} \longrightarrow d \longrightarrow \text{integração} \longrightarrow \text{Stokes}.$$

Esta linguagem será também essencial para formular de modo independente das coordenadas os operadores clássicos do cálculo vetorial.

Definição 13.1 (m -vetor e espaço $\Lambda_m(V)$). Seja V um espaço vetorial real de dimensão N e seja $m \geq 1$. Um m -vetor *simplex* é um símbolo

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m, \quad v_1, \dots, v_m \in V,$$

que é multilinear e alternado nos vetores $v_1, \dots, v_m$. Em particular,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_m = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_m,$$

e o produto é nulo sempre que os vetores são linearmente dependentes.

O espaço vetorial gerado pelos m -vetores simples, sujeito a estas relações de multilinearidade e alternância, é denotado por

$$\boxed{\Lambda_m(V)}$$

e chama-se *espaço dos m -vetores* de V . Por convenção, $\Lambda_0(V) := \mathbb{R}$.

Esta é a notação utilizada para distinguir desde o início vetores e covetores: o índice inferior em $\Lambda_m(V)$ corresponde aos m -vetores. Se $(e_1, \dots, e_N)$ é uma base de V , então

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N\}$$

é uma base de $\Lambda_m(V)$. Consequentemente,

$$\dim \Lambda_m(V) = \binom{N}{m}, \quad 0 \leq m \leq N,$$

e $\Lambda_m(V) = \{0\}$ para $m > N$.

Exemplo 13.2 (m -vetores simples e não simples). Em $\mathbb{R}^3$, $e_1 \wedge e_2$ é um 2-vetor simples e representa um elemento de área orientado. Em $\mathbb{R}^4$,

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$$

é um 2-vetor que não é simples: não pode ser escrito como um único produto $u \wedge v$.

Definição 13.3 (m -covetor e espaço $\Lambda^m(V^*)$). Um m -covetor sobre V é uma aplicação multilinear alternada

$$\omega : V^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad V^m := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m \text{ vezes}}.$$

Assim, ω recebe m vetores de V e associa-lhes um número real,

$$(v_1, \dots, v_m) \longmapsto \omega(v_1, \dots, v_m).$$

A multilinearidade significa que ω é linear em cada argumento quando os restantes são fixados; por exemplo,

$$\omega(av + bw, v_2, \dots, v_m) = a\omega(v, v_2, \dots, v_m) + b\omega(w, v_2, \dots, v_m).$$

A alternância significa que $\omega(v_1, \dots, v_m) = 0$ sempre que dois argumentos coincidem. Equivalentemente, a troca de dois argumentos muda o sinal:

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

Mais geralmente, para toda a permutação $\sigma \in S_m$,

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_m).$$

O espaço vetorial de todos os m -covetores é denotado por

$$\Lambda^m(V^*) := \{\omega : V^m \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é multilinear e alternada}\}.$$

Por convenção, $\Lambda^0(V^*) := \mathbb{R}$.

Proposição 13.4 (Dualidade entre m -vetores e m -covetores). *Todo m -covetor $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ define de maneira única uma forma linear sobre $\Lambda_m(V)$ por*

$$\omega[v_1 \wedge \cdots \wedge v_m] := \omega(v_1, \dots, v_m).$$

Reciprocamente, toda forma linear sobre $\Lambda_m(V)$ determina deste modo um m -covetor. Portanto existe uma identificação canônica

$$\Lambda^m(V^*) \simeq (\Lambda_m(V))^*.$$

Demonstração. A multilinearidade e a alternância de ω garantem que o valor $\omega(v_1, \dots, v_m)$ respeita exatamente as relações que definem $\Lambda_m(V)$; por isso a expressão acima depende apenas do m -vetor $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ e prolonga-se linearmente a $\Lambda_m(V)$. Reciprocamente, se $L \in (\Lambda_m(V))^*$, a aplicação

$$(v_1, \dots, v_m) \longmapsto L(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m)$$

é multilinear e alternada, logo é um elemento de $\Lambda^m(V^*)$. As duas construções são inversas uma da outra. $\square$

Exemplo 13.5 (Graus 1, 2 e 3). Para $m = 1$, a condição de alternância é vazia e um 1-covetor é simplesmente uma forma linear; portanto $\Lambda^1(V^*) = V^*$. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, se

$$u = (u^1, u^2, u^3),$$

então

$$\alpha(u) := 2u^1 - u^2 + 3u^3$$

define um 1-covetor, isto é,

$$\alpha = 2dx^1 - dx^2 + 3dx^3.$$

Em $\mathbb{R}^2$, a aplicação

$$\omega(u, v) := \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{pmatrix} = u^1v^2 - u^2v^1$$

é um 2-covetor: mede a área orientada do paralelogramo gerado por u e v . Em $\mathbb{R}^3$, a aplicação

$$\Omega(u, v, w) := \det(u, v, w)$$

é um 3-covetor e mede o volume orientado do paralelepípedo gerado por u, v, w .

Exemplo 13.6 (Alternância e dependência linear). Se $u = (1, 2)$ e $v = (3, 1)$, então

$$\omega(u, v) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5, \quad \omega(v, u) = 5 = -\omega(u, v).$$

Além disso, $\omega(u, u) = 0$. Mais geralmente, uma aplicação multilinear alternada anula-se sempre que os seus argumentos são linearmente dependentes. Assim, se $v = \lambda u$, então $\omega(u, v) = 0$.

Se $(e_1, \dots, e_N)$ é uma base de V e $(e^1, \dots, e^N)$ a base dual, então a base de $\Lambda^m(V^*)$ dual da base $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ de $\Lambda_m(V)$ é

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N\}.$$

Em particular,

$$\dim \Lambda^m(V^*) = \dim \Lambda_m(V) = \binom{N}{m}.$$

É importante distinguir o grau m da dimensão N de V . Por exemplo, em $V = \mathbb{R}^3$ existem 1-, 2- e 3-covetores. Se $m > N$, então $\Lambda^m(V^*) = \{0\}$, pois quaisquer m vetores de V são linearmente dependentes.

Nota 13.7 (Formas de grau máximo). Se $\dim V = N$, então

$$\dim \Lambda^N(V^*) = \binom{N}{N} = 1.$$

Se $(e^1, \dots, e^N)$ é uma base de V^* , segue que

$$\Lambda^N(V^*) = \text{span}\{e^1 \wedge \dots \wedge e^N\}.$$

Assim, todo N -covetor $\omega \in \Lambda^N(V^*)$ se escreve de maneira única como

$$\omega = \lambda e^1 \wedge \dots \wedge e^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se $\mu \in \Lambda^N(V^*)$ é não nulo, então μ é uma base desse espaço unidimensional e todo N -covetor é um múltiplo único de μ . Esta observação será utilizada mais adiante na definição intrínseca da divergência a partir de uma forma de volume.

Definição 13.8 (Produto exterior). Se $a_1, \dots, a_m \in V^*$, define-se

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m)(v_1, \dots, v_m) := \det(a_i(v_j))_{i,j=1}^m.$$

Por extensão bilinear obtém-se

$$\wedge : \Lambda^r(V^*) \times \Lambda^s(V^*) \longrightarrow \Lambda^{r+s}(V^*).$$

Exemplo 13.9 ($dx \wedge dy$ e área orientada). Em $\mathbb{R}^2$, sejam $\alpha = dx$ e $\beta = dy$. Para

$$u = (u^1, u^2), \quad v = (v^1, v^2),$$

temos

$$(dx \wedge dy)(u, v) = \det \begin{pmatrix} dx(u) & dx(v) \\ dy(u) & dy(v) \end{pmatrix} = u^1 v^2 - u^2 v^1.$$

Tomando $u = (3, 2)$ e $v = (1, 3)$,

$$(dx \wedge dy)(u, v) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7.$$

O valor 7 é a área orientada do paralelogramo gerado por u e v . Invertendo a ordem,

$$(dx \wedge dy)(v, u) = -7,$$

e, se os dois argumentos coincidem,

$$(dx \wedge dy)(u, u) = 0.$$

Exemplo 13.10 (Cálculo algébrico em $\mathbb{R}^2$). Se

$$\alpha = 2 dx + 3 dy, \quad \beta = dx - 2 dy,$$

então, pela bilinearidade e pela alternância,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (2 dx + 3 dy) \wedge (dx - 2 dy) \\ &= 2 dx \wedge dx - 4 dx \wedge dy + 3 dy \wedge dx - 6 dy \wedge dy \\ &= -7 dx \wedge dy, \end{aligned}$$

pois $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ e $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$.

Exemplo 13.11 (Um produto exterior em $\mathbb{R}^3$). Se

$$\alpha = dx, \quad \beta = 2 dy + 3 dz,$$

então

$$\alpha \wedge \beta = 2 dx \wedge dy + 3 dx \wedge dz.$$

Para $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, 1)$,

$$(dx \wedge dy)(u, v) = 1, \quad (dx \wedge dz)(u, v) = 1,$$

e portanto

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = 5.$$

Exemplo 13.12 (2-covetores em $\mathbb{R}^3$). Como

$$\dim \Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*) = \binom{3}{2} = 3,$$

todo o 2-covetor em $\mathbb{R}^3$ escreve-se de maneira única como

$$\omega = A dx \wedge dy + B dy \wedge dz + C dz \wedge dx.$$

Os três termos medem áreas orientadas projetadas, respetivamente, sobre os planos xy , yz e zx . Por exemplo,

$$\omega = 2 dx \wedge dy - 3 dy \wedge dz + dz \wedge dx$$

é um 2-covetor concreto em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 13.13 (Produto exterior de três 1-covetores). Em $\mathbb{R}^3$,

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $dx \wedge dy \wedge dz$ mede o volume orientado. Para

$$u = (1, 0, 0), \quad v = (1, 2, 0), \quad w = (1, 1, 3),$$

obtemos

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(u, v, w) = 6.$$

Exemplo 13.14 (Quando o produto exterior se anula). Se $\alpha = dx + 2 dy$, então

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \alpha &= (dx + 2 dy) \wedge (dx + 2 dy) \\ &= dx \wedge dx + 2 dx \wedge dy + 2 dy \wedge dx + 4 dy \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Mais geralmente, se $\beta = \lambda \alpha$, então $\alpha \wedge \beta = 0$. O produto exterior deteta assim a dependência linear entre 1-covetores.

Proposição 13.15 (Regras do produto exterior). Para formas homogêneas α, β, γ ,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha,$$

se $\deg \alpha = r$ e $\deg \beta = s$. O produto é distributivo relativamente à soma.

Demonstração. Começemos por formas decomponíveis. Se

$$\alpha = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r, \quad \beta = b_1 \wedge \cdots \wedge b_s, \quad \gamma = c_1 \wedge \cdots \wedge c_t,$$

com $a_i, b_j, c_k \in V^*$, então, pela definição do produto exterior,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_s \wedge c_1 \wedge \cdots \wedge c_t.$$

A mesma expressão é obtida agrupando primeiro os últimos fatores, pelo que

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Por linearidade, a identidade vale para formas homogêneas arbitrárias.

Para a comutatividade graduada, ainda no caso decomponível, passar o bloco $a_1, \dots, a_r$ através do bloco $b_1, \dots, b_s$ exige rs trocas de 1-covetores. Cada troca muda o sinal, uma vez que $a \wedge b = -b \wedge a$. Consequentemente,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha.$$

Novamente, a bilinearidade permite concluir para formas homogêneas quaisquer. Em particular, para 1-covetores,

$$a \wedge b = -b \wedge a, \quad a \wedge a = 0.$$

Finalmente, a distributividade é uma consequência direta da bilinearidade do produto exterior. Por exemplo,

$$(\alpha + \tilde{\alpha}) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \tilde{\alpha} \wedge \beta,$$

e, analogamente,

$$\alpha \wedge (\beta + \tilde{\beta}) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \tilde{\beta}.$$

Isto demonstra as regras enunciadas. □

Nota 13.16. Os exemplos anteriores evidenciam três aspetos da mesma construção:

alternância	$\longleftrightarrow$	determinante	$\longleftrightarrow$	volume orientado.
-------------	-----------------------	--------------	-----------------------	-------------------

Em $\mathbb{R}^3$, $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ e $dz \wedge dx$ representam elementos de área orientada, enquanto $dx \wedge dy \wedge dz$ representa o elemento de volume orientado.

13.2 Formas diferenciais numa variedade

Passamos agora da álgebra exterior de um único espaço vetorial para uma variedade diferenciável. Para cada $p \in M$, o espaço dual do espaço tangente é o *espaço cotangente*

$$T_p^* M := (T_p M)^*.$$

Os seus elementos são os covetores em p . Fazendo variar p , obtemos o *fibrado cotangente*

$$T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^* M,$$

que é o fibrado vetorial dual do fibrado tangente TM .

Antes de prosseguir, explicitemos o significado dos covetores dx^i . Em $\mathbb{R}^n$, as funções coordenadas

$$x^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x^i(x^1, \dots, x^n) := x^i,$$

são simplesmente as projeções sobre os eixos coordenados. A sua diferencial num ponto x é a aplicação linear

$$dx_x^i : T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$dx_x^i(v^1, \dots, v^n) = v^i.$$

Assim, dx_x^i extrai a i -ésima componente de um vetor tangente. Em coordenadas cartesianas esta aplicação linear não depende do ponto x e escreve-se simplesmente

$$dx^i(v^1, \dots, v^n) = v^i.$$

Em particular, em $\mathbb{R}^2$,

$$dx(a, b) = a, \quad dy(a, b) = b.$$

Esta interpretação coincide com a noção de base dual. Em coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ numa variedade, a base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

de $T_p M$ possui a base dual $(dx^1, \dots, dx^n)$ de $T_p^* M$, caracterizada por

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

Consequentemente, se $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, então $dx^i(v) = v^i$: o covetor dx^i continua a desempenhar o papel de projeção sobre a i -ésima componente.

Aplicamos agora, fibra a fibra, a construção anterior. Para cada $p \in M$, $\Lambda_m(T_p M)$ é o espaço dos m -vetores tangentes em p e $\Lambda^m(T_p^* M)$ é o espaço dos m -covetores em p . Definimos os fibrados exteriores

$$\Lambda_m T M := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda_m(T_p M), \quad \Lambda^m T^* M := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^m(T_p^* M).$$

A fibra de $\Lambda^m T^* M$ sobre p é, portanto,

$$(\Lambda^m T^* M)_p = \Lambda^m(T_p^* M) \simeq (\Lambda_m(T_p M))^*.$$

Se $\dim M = n$, esta fibra tem dimensão $\binom{n}{m}$.

Definição 13.17 (Forma diferencial). Seja M uma variedade diferenciável. Uma m -forma diferencial suave em M é uma secção suave do fibrado $\Lambda^m T^* M$; isto é, uma aplicação

$$p \longmapsto \omega_p \in \Lambda^m(T_p^* M).$$

O espaço destas formas é denotado por $\Omega^m(M)$.

Em coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$,

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \omega_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}.$$

Assim, uma 0-forma é uma função suave, uma 1-forma atua sobre vetores tangentes, e uma forma de grau máximo é o integrando natural sobre uma variedade orientada.

Nota 13.18 (Mudança de coordenadas). O produto exterior incorpora automaticamente o determinante jacobiano. Por exemplo, se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$,

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv.$$

O sinal do jacobiano regista simultaneamente a mudança de escala e a orientação.

13.3 O diferencial exterior

Definição 13.19 (Diferencial exterior). Para $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, define-se df pela relação

$$df_p(X) := Xf, \quad X \in T_p M.$$

Em coordenadas, $df = \partial_i f dx^i$. Para uma forma local

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I,$$

define-se

$$d\omega := \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

Assim,

$$d : \Omega^m(M) \longrightarrow \Omega^{m+1}(M).$$

Proposição 13.20 (Propriedades fundamentais). Se $\alpha \in \Omega^r(M)$ e $\beta \in \Omega^s(M)$, então

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta,$$

e

$$\boxed{d^2 = 0}.$$

Demonstração. As duas primeiras propriedades seguem da definição local e da regra de Leibniz para as funções coeficientes. Para a terceira, basta considerar um termo $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Então

$$d^2\omega = \partial_k \partial_j f dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

A matriz $(\partial_k \partial_j f)$ é simétrica, enquanto $dx^k \wedge dx^j$ é antissimétrico; os termos cancelam-se dois a dois. $\square$

13.4 Formas fechadas e exatas

A identidade $d^2 = 0$ é o ponto de partida para distinguir duas noções fundamentais.

Definição 13.21 (Formas fechadas e exatas). Uma forma $\omega \in \Omega^m(U)$ é *fechada* se

$$d\omega = 0,$$

e é *exata* se existe $\alpha \in \Omega^{m-1}(U)$ tal que

$$\omega = d\alpha.$$

Como $d^2 = 0$, toda forma exata é fechada. Convém demonstrar esta identidade em coordenadas, pois é precisamente a alternância do produto exterior que faz desaparecer as derivadas segundas.

Teorema 13.22 (Identidade $d^2 = 0$). *Se ϕ é uma m -forma diferencial de classe C^2 num aberto $U \subset \mathbb{R}^N$, então*

$$d(d\phi) = 0.$$

Demonstração. Começemos pelo caso $m = 0$. Então $\phi = f$ é uma função de classe C^2 e

$$df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Aplicando novamente d ,

$$d(df) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i.$$

Os termos com $i = j$ são nulos, pois $dx^i \wedge dx^i = 0$. Para $i \neq j$, agrupando os termos correspondentes aos pares (i, j) e (j, i) , obtemos

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

pelo teorema de Schwarz. Logo $d(df) = 0$.

Consideremos agora uma m -forma. Por linearidade, basta tratar um termo

$$\phi = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}.$$

Temos

$$d\phi = \sum_j f_{,j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m},$$

e portanto

$$d(d\phi) = \sum_{j,k} f_{,jk} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}.$$

Se algum dos índices se repete, o produto exterior correspondente é nulo. Nos restantes termos, a troca $j \leftrightarrow k$ muda o sinal do produto exterior,

$$dx^k \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^k,$$

enquanto $f_{,jk} = f_{,kj}$. Os termos cancelam-se dois a dois. Assim,

$$d^2\phi = 0.$$

Por linearidade, o mesmo vale para qualquer m -forma ϕ . □

Nota 13.23 (Terminologia). A identidade $d^2 = 0$ é por vezes apresentada juntamente com o lema de Poincaré. Distinguiremos aqui os dois resultados: $d^2 = 0$ é a identidade fundamental do

diferencial exterior, enquanto o *lema de Poincaré* afirma localmente a recíproca relevante, isto é, que uma forma fechada de grau positivo é localmente exata.

13.5 Push-forward de vetores

Se $F : M \rightarrow N$ é diferenciável, a sua diferencial transporta vetores tangentes no sentido da aplicação. Esta operação será usada mais tarde para comparar campos vetoriais e movimentos em variedades diferentes.

Definição 13.24 (Push-forward de um vetor). Para $X_p \in T_p M$, define-se

$$F_* X_p := dF_p(X_p) \in T_{F(p)} N.$$

Identificando vetores tangentes com derivações,

$$(F_* X_p)(f) := X_p(f \circ F), \quad f \in C^\infty(N).$$

Em coordenadas $x = (x^1, \dots, x^m)$ em M e $y = (y^1, \dots, y^n)$ em N , escrevendo

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad F = (F^1, \dots, F^n),$$

obtém-se

$$(F_* X)^\alpha = \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} X^i.$$

A matriz do push-forward é, portanto, a matriz jacobiana de F .

Exemplo 13.25 (Uma aplicação linear). Considere

$$F(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Para $X = 3\partial_x - \partial_y$,

$$DF = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (F_* X)^1 \\ (F_* X)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$F_* X = 5\partial_{y^1} + 4\partial_{y^2}.$$

Para covetores e formas diferenciais a direção natural é a oposta. Se α é um covetor em $F(p)$, podemos fazê-lo atuar sobre $F_* X_p$; obtemos assim um covetor em p .

13.6 Homotopias, pull-back e derivada de Lie

13.6.1 Homotopias

Definição 13.26 (Homotopia). Sejam $f_0, f_1 : U \rightarrow V$ duas aplicações contínuas. Uma *homotopia* entre f_0 e f_1 é uma aplicação contínua

$$F : [0, 1] \times U \longrightarrow V$$

tal que

$$F(0, x) = f_0(x), \quad F(1, x) = f_1(x).$$

Escrevendo $F_t(x) := F(t, x)$, a família $(F_t)_{0 \leq t \leq 1}$ descreve uma deformação contínua de f_0 em f_1 .

Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é estrelado relativamente a 0, a família

$$F_t(x) := tx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

é uma homotopia entre a aplicação constante $F_0(x) = 0$ e a identidade $F_1 = \text{Id}$. A condição de domínio estrelado garante precisamente que $tx \in U$ para todo $x \in U$ e todo $t \in [0, 1]$.

13.6.2 Pull-back de formas diferenciais

Antes de comparar formas ao longo de uma deformação, precisamos de uma operação que permita transportar uma forma situada no espaço de chegada para o espaço de partida.

Definição 13.27 (Pull-back de uma forma diferencial). Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e seja $\omega \in \Omega^m(N)$. O *pull-back* de ω por F é a m -forma $F^*\omega \in \Omega^m(M)$ definida, para $p \in M$ e $v_1, \dots, v_m \in T_pM$, por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_m) := \omega_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_m).$$

A diferencial atua no sentido da aplicação,

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

enquanto o pull-back atua no sentido oposto sobre as formas,

$$F^* : \Omega^m(N) \longrightarrow \Omega^m(M).$$

Esta inversão do sentido é precisamente o que permite comparar, no mesmo ponto de partida, grandezas covariantes definidas em pontos diferentes.

Antes do exemplo, recordemos que, para uma aplicação

$$F = (F^1, \dots, F^m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

a diferencial é a aplicação linear

$$dF_x(v) = DF(x)v, \quad DF(x) = \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}(x) \right).$$

Exemplo 13.28 (Cálculo diretamente pela definição). Considere

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x^2, y),$$

onde denotamos por (u, v) as coordenadas no espaço de chegada. Temos $F^1 = x^2$, $F^2 = y$ e

$$dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dF_{(x,y)}(a, b) = (2xa, b).$$

Como os covetores coordenados no espaço de chegada são as projeções

$$du_{(u,v)}(c, d) = c, \quad dv_{(u,v)}(c, d) = d,$$

a definição de pull-back dá

$$\begin{aligned}(F^* du)_{(x,y)}(a, b) &= du_{(x^2,y)}(2xa, b) = 2xa, \\ (F^* dv)_{(x,y)}(a, b) &= dv_{(x^2,y)}(2xa, b) = b.\end{aligned}$$

Logo,

$$F^* du = 2x dx, \quad F^* dv = dy.$$

Para a 1-forma $\omega = u dv$, usando diretamente a definição,

$$(F^* \omega)_{(x,y)}(a, b) = \omega_{(x^2,y)}(2xa, b) = x^2 b,$$

e portanto

$$F^* \omega = x^2 dy.$$

Este cálculo utiliza apenas a definição de pull-back; a compatibilidade do pull-back com a diferencial exterior será estabelecida a seguir.

Proposição 13.29 (Composição de pull-backs). *Se $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow P$ são aplicações diferenciáveis, então, para toda forma $\omega \in \Omega^m(P)$,*

$$(G \circ F)^* \omega = F^*(G^* \omega).$$

Demonstração. Para $p \in M$ e $v_1, \dots, v_m \in T_p M$, pela definição de pull-back e pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}((G \circ F)^* \omega)_p(v_1, \dots, v_m) &= \omega_{G(F(p))}(d(G \circ F)_p v_1, \dots, d(G \circ F)_p v_m) \\ &= \omega_{G(F(p))}(dG_{F(p)} dF_p v_1, \dots, dG_{F(p)} dF_p v_m) \\ &= (F^*(G^* \omega))_p(v_1, \dots, v_m).\end{aligned}$$

□

Proposição 13.30 (Compatibilidade com o produto exterior). *Se $F : M \rightarrow N$ é diferenciável, $\alpha \in \Omega^r(N)$ e $\beta \in \Omega^s(N)$, então*

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^* \alpha \wedge F^* \beta.$$

Demonstração. Para $p \in M$ e $v_1, \dots, v_{r+s} \in T_p M$, pela definição de pull-back,

$$(F^*(\alpha \wedge \beta))_p(v_1, \dots, v_{r+s}) = (\alpha \wedge \beta)_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_{r+s}).$$

Na definição alternada do produto exterior, cada termo distribui os vetores $dF_p v_j$ entre α e β . Esta é exatamente a mesma soma alternada que define

$$(F^* \alpha \wedge F^* \beta)_p(v_1, \dots, v_{r+s}),$$

pois $(F^* \alpha)_p$ e $(F^* \beta)_p$ se obtêm inserindo dF_p em cada argumento. Logo as duas formas coincidem. □

Proposição 13.31 (Naturalidade da diferencial exterior). *Se $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação*

diferenciável e $\omega \in \Omega^m(N)$, então

$$\boxed{d(F^*\omega) = F^*(d\omega).}$$

Demonstração. Em coordenadas locais $(y^1, \dots, y^n)$ no espaço de chegada, escrevamos

$$\omega = \sum_I a_I(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_m}.$$

Se $F = (F^1, \dots, F^n)$, então

$$F^*\omega = \sum_I (a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_m}.$$

Aplicando d e usando a regra de Leibniz graduada,

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= \sum_I d(a_I \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_m} \\ &\quad + \sum_{I,j} (\pm)(a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \dots \wedge \underbrace{d(dF^{i_j})}_{=0} \wedge \dots \wedge dF^{i_m}. \end{aligned}$$

O segundo termo é nulo porque $d^2 = 0$. Expliquemos agora as duas identidades usadas no primeiro termo. Para $p \in M$ e $v \in T_p M$, a regra da cadeia e a definição de pull-back dão

$$\begin{aligned} d(a_I \circ F)_p(v) &= (da_I)_{F(p)}(dF_p v) \\ &= (F^* da_I)_p(v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{d(a_I \circ F) = F^*(da_I).}$$

Por outro lado, se y^i é uma função coordenada no espaço de chegada, então $F^i = y^i \circ F$; aplicando a identidade anterior a y^i ,

$$\boxed{F^*(dy^i) = d(y^i \circ F) = dF^i.}$$

Usando agora a compatibilidade do pull-back com o produto exterior, demonstrada acima, obtemos

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= \sum_I F^*(da_I) \wedge F^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dy^{i_m}) \\ &= \sum_I F^*(da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_m}) \\ &= F^*\left(\sum_I da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_m}\right) \\ &= F^*(d\omega). \end{aligned}$$

A identidade é local e, portanto, vale globalmente. $\square$

Nota 13.32 (Releitura do exemplo anterior). Depois de demonstrada a naturalidade, o mesmo cálculo pode ser feito de forma mais curta. Como $u \circ F = x^2$ e $v \circ F = y$,

$$F^*(du) = d(u \circ F) = d(x^2) = 2x dx, \quad F^*(dv) = d(v \circ F) = d(y) = dy.$$

A propriedade $F^*d = dF^*$ não foi, portanto, necessária para definir nem para calcular inicialmente o pull-back; ela fornece agora uma maneira mais eficiente de efetuar o mesmo cálculo.

13.6.3 Fluxos e campos geradores

Antes da segunda demonstração do lema de Poincaré, convém distinguir três objetos que aparecem naturalmente numa família de aplicações dependente de um parâmetro: a posição inicial de um ponto, a sua posição atual e o campo de velocidades que descreve o movimento.

Seja, para t num intervalo, uma família suave de difeomorfismos

$$F_t : U \longrightarrow U.$$

Fixemos $x \in U$. Quando t varia, o ponto x descreve a curva

$$y(t) := F_t(x).$$

A sua velocidade no instante t é

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial F_t}{\partial t}(x).$$

Nesta expressão, x é a posição inicial, ou, em linguagem de mecânica dos meios contínuos, a etiqueta da partícula. O campo de velocidades, pelo contrário, deve dar a velocidade em função da posição atual y .

Definição 13.33 (Campo gerador de uma família de difeomorfismos). O campo vetorial dependente do tempo X_t associado à família F_t é definido pela relação

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x) = X_t(F_t(x)).$$

Assim, o membro esquerdo é a velocidade da partícula que partiu de x , enquanto o membro direito é o campo de velocidades avaliado na posição atual dessa partícula.

Se escrevermos

$$y = F_t(x),$$

então $x = F_t^{-1}(y)$ e a mesma relação pode ser escrita

$$X_t(y) = \left. \frac{\partial F_s}{\partial s} \right|_{s=t} (F_t^{-1}(y)).$$

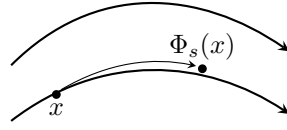
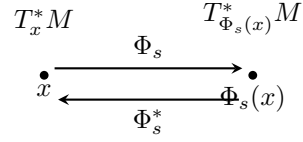
Esta segunda fórmula não introduz uma nova ideia: exprime simplesmente a velocidade em função da posição atual y , em vez da posição inicial x .

13.6.4 Derivada de Lie

Para compreender a variação do pull-back, introduzimos primeiro a derivada de Lie. Seja X um campo vetorial e seja Φ_s o seu fluxo local, isto é,

$$\frac{d}{ds}\Phi_s(x) = X(\Phi_s(x)), \quad \Phi_0(x) = x.$$

Quando o ponto x é transportado para $\Phi_s(x)$, a forma $\phi_{\Phi_s(x)}$ pertence ao espaço cotangente sobre o novo ponto. Para a comparar com a forma no ponto inicial, transportamo-la de volta por meio do pull-back $\Phi_s^*\phi$.

fluxo de X 

comparação pelo pull-back

Definição 13.34 (Derivada de Lie de uma forma diferencial). A *derivada de Lie* de ϕ na direção de X é a variação infinitesimal do pull-back pelo fluxo de X :

$$\mathcal{L}_X \phi := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_s^* \phi.$$

Exemplo 13.35 (Translação em $\mathbb{R}^2$). Para

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Phi_s(x, y) = (x + s, y),$$

e para a 1-forma $\phi = f(x, y) dx$, temos

$$\Phi_s^* \phi = f(x + s, y) dx.$$

Logo,

$$\mathcal{L}_X \phi = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(x + s, y) dx = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx.$$

Neste exemplo, a derivada de Lie mede a variação da forma quando esta é observada ao longo das translações geradas por X .

A definição anterior utiliza o fluxo de X . Para a aplicação que se segue é importante observar que, no instante inicial, a derivada depende apenas da velocidade da deformação e não dos termos de ordem superior.

Proposição 13.36 (A derivada de Lie depende apenas da velocidade inicial). *Seja G_h uma família suave de difeomorfismos tal que*

$$G_0 = \text{Id}, \quad \left. \frac{\partial G_h}{\partial h} \right|_{h=0} = X.$$

Então, para toda forma diferencial ϕ ,

$$\left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} G_h^* \phi = \mathcal{L}_X \phi.$$

Demonstração. Fixemos x e vetores $v_1, \dots, v_m \in T_x M$. Em coordenadas locais, das hipóteses sobre G_h resulta

$$G_h(x) = x + hX(x) + o(h), \quad dG_h(x) = I + h dX(x) + o(h).$$

Pela definição de pull-back,

$$(G_h^* \phi)_x(v_1, \dots, v_m) = \phi_{G_h(x)}(dG_h(x)v_1, \dots, dG_h(x)v_m).$$

Há aqui duas variações. A primeira provém do ponto de base $x \mapsto G_h(x)$ e fornece

$$D\phi_x[X(x)](v_1, \dots, v_m).$$

A segunda provém dos m argumentos. Para cada j ,

$$dG_h(x)v_j = v_j + h dX(x)v_j + o(h).$$

Como ϕ_x é multilinear,

$$\begin{aligned} \phi_x(v_1 + h dXv_1, \dots, v_m + h dXv_m) \\ = \phi_x(v_1, \dots, v_m) + h \sum_{j=1}^m \phi_x(v_1, \dots, dX(x)v_j, \dots, v_m) + o(h). \end{aligned}$$

Os termos em que dois ou mais argumentos são simultaneamente perturbados são de ordem pelo menos h^2 e não contribuem para a derivada em $h = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} (G_h^* \phi)_x(v_1, \dots, v_m) &= D\phi_x[X(x)](v_1, \dots, v_m) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \phi_x(v_1, \dots, dX(x)v_j, \dots, v_m). \end{aligned}$$

Esta expressão depende apenas de $X = \dot{G}_0$. O fluxo Φ_h de X satisfaz igualmente

$$\Phi_h(x) = x + hX(x) + o(h),$$

e possui, portanto, a mesma derivada em $h = 0$. Pela definição de derivada de Lie,

$$\left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} G_h^* \phi = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \Phi_h^* \phi = \mathcal{L}_X \phi.$$

□

Nota 13.37. A proposição exprime o caráter infinitesimal da derivada de Lie: para calcular a variação em $h = 0$, basta conhecer a velocidade inicial da família G_h .

13.6.5 Contração e fórmula de Cartan

Definição 13.38 (Contração ou produto interior). Seja X um campo vetorial em U e seja $\omega \in \Omega^m(U)$, com $m \geq 1$. A *contração* (ou *produto interior*) de ω pelo campo X é a $(m-1)$ -forma

$$\iota_X \omega \in \Omega^{m-1}(U)$$

definida por

$$(\iota_X \omega)_x(v_1, \dots, v_{m-1}) := \omega_x(X_x, v_1, \dots, v_{m-1}).$$

Assim, fixa-se o primeiro argumento de ω igual a X_x ; por isso o grau diminui de m para $m-1$.

Exemplo 13.39 (Contração de uma 1-forma). Se

$$\alpha = a_1 dx^1 + \dots + a_N dx^N, \quad X = X^1 \partial_1 + \dots + X^N \partial_N,$$

então $\iota_X \alpha$ é uma 0-forma, isto é, uma função, e

$$\iota_X \alpha = \alpha(X) = \sum_{i=1}^N a_i X^i.$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, se $\alpha = 2 dx - dy$ e $X = 3\partial_x + 4\partial_y$, então

$$\iota_X \alpha = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Exemplo 13.40 (Contração de uma 2-forma em $\mathbb{R}^2$). Considere

$$\phi = f(x, y) dx \wedge dy.$$

Antes da contração, ϕ recebe dois vetores. Se

$$v_1 = a\partial_x + b\partial_y, \quad v_2 = c\partial_x + d\partial_y,$$

então

$$\phi(v_1, v_2) = f(x, y) \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = f(x, y)(ad - bc).$$

Considere agora o campo radial

$$R = x\partial_x + y\partial_y.$$

A 1-forma $\iota_R \phi$ recebe apenas um vetor arbitrário

$$v = a\partial_x + b\partial_y,$$

e, pela definição,

$$\begin{aligned} (\iota_R \phi)(v) &= \phi(R, v) \\ &= f(x, y) \begin{vmatrix} dx(R) & dx(v) \\ dy(R) & dy(v) \end{vmatrix} \\ &= f(x, y) \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = f(x, y)(xb - ya). \end{aligned}$$

Como

$$(x dy - y dx)(v) = xb - ya,$$

concluimos que

$$\boxed{\iota_R \phi = f(x, y)(x dy - y dx).}$$

Este cálculo torna explícita a passagem de dois argumentos para um argumento:

$$\phi(R, v) \longleftrightarrow (\iota_R \phi)(v).$$

Exemplo 13.41 (Forma volume em $\mathbb{R}^3$). Se

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz, \quad X = X^1 \partial_x + X^2 \partial_y + X^3 \partial_z,$$

então

$$\boxed{\iota_X \Omega = X^1 dy \wedge dz - X^2 dx \wedge dz + X^3 dx \wedge dy.}$$

Em particular, a contração transforma a forma volume, de grau 3, numa 2-forma que mede o

fluxo transversal ao campo X .

Proposição 13.42 (Regra de Leibniz graduada para a contração). *Se $\alpha \in \Omega^p(U)$ e $\beta \in \Omega^q(U)$, então*

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (\iota_X \beta).$$

Demonstração. A identidade resulta diretamente da definição do produto exterior: ao inserir X nos argumentos de $\alpha \wedge \beta$, ou X ocupa um dos p argumentos destinados a α , ou atravessa esses p argumentos e ocupa um argumento de β . A segunda possibilidade introduz o sinal $(-1)^p$ pela alternância. $\square$

Teorema 13.43 (Fórmula de Cartan). *Para todo campo vetorial X e toda forma diferencial ω ,*

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X(d\omega).$$

Demonstração. A identidade é local. Em coordenadas $(x^1, \dots, x^N)$, basta verificá-la primeiro para funções e para as 1-formas coordenadas e depois usar as regras de Leibniz graduadas.

Se $f \in C^\infty(U)$, então $\iota_X f = 0$ e

$$\mathcal{L}_X f = Xf = \iota_X(df),$$

pelo que a fórmula é válida em grau zero.

Para uma função coordenada x^i , a forma dx^i tem grau 1; por isso, $\iota_X dx^i$ tem grau zero, isto é, é uma função. Em cada ponto p ,

$$(\iota_X dx^i)(p) := dx_p^i(X_p) = X^i(p),$$

e portanto

$$\iota_X dx^i = X^i.$$

Como $d(dx^i) = d^2 x^i = 0$, segue que

$$d(\iota_X dx^i) + \iota_X(d dx^i) = dX^i.$$

Por outro lado, se Φ_s é o fluxo de X , a naturalidade de d dá

$$\Phi_s^*(dx^i) = \Phi_s^*(dx^i) = d(x^i \circ \Phi_s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(dx^i) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Phi_s^*(dx^i) \\ &= d \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (x^i \circ \Phi_s) \right). \end{aligned}$$

Aqui d/ds deriva no parâmetro do fluxo e d nas variáveis espaciais; para uma família suave, estas derivadas comutam. Além disso, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} x^i(\Phi_s(p)) = dx_p^i(X_p) = X^i(p).$$

Logo

$$\mathcal{L}_X(dx^i) = dX^i.$$

Nota 13.44. A mesma identidade fornece uma primeira verificação concreta da fórmula de Cartan:

$$\mathcal{L}_X dx^i = d(\iota_X dx^i) + \iota_X(d dx^i) = dX^i.$$

Resta passar destes geradores locais para uma forma arbitrária. O operador $\mathcal{L}_X$ satisfaz

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta),$$

como se obtém derivando $\Phi_s^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi_s^* \alpha \wedge \Phi_s^* \beta$ em $s = 0$. Por outro lado, $D_X := d\iota_X + \iota_X d$ satisfaz a mesma regra de Leibniz de grau zero: basta combinar as regras de Leibniz graduadas de d e de ι_X , observando que os termos cruzados se anulam dois a dois.

Como $\mathcal{L}_X$ e D_X coincidem sobre as funções e sobre cada dx^i , e toda forma se escreve localmente como soma de termos

$$f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m},$$

as regras de Leibniz anteriores mostram que coincidem sobre todas as formas diferenciais. Portanto,

$$\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d.$$

□

A fórmula de Cartan exprime a variação de uma forma pelo fluxo exclusivamente através das duas operações fundamentais d e ι_X . É esta relação que permitirá transformar a variação do pull-back radial numa identidade de homotopia.

Proposição 13.45 (Comutador da derivada de Lie com a contração interior). *Sejam V e X campos vetoriais suaves numa variedade diferenciável. Para qualquer forma diferencial α ,*

$$[\mathcal{L}_V, \iota_X]\alpha = \mathcal{L}_V(\iota_X \alpha) - \iota_X(\mathcal{L}_V \alpha) = \iota_{[V, X]}\alpha.$$

Demonstração. Para $\alpha \in \Omega^k(M)$ e campos $Y_1, \dots, Y_{k-1}$, a definição da derivada de Lie sobre formas dá

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V \iota_X \alpha)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) &= V(\alpha(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha(X, Y_1, \dots, [V, Y_j], \dots, Y_{k-1}), \\ (\iota_X \mathcal{L}_V \alpha)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) &= V(\alpha(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})) - \alpha([V, X], Y_1, \dots, Y_{k-1}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha(X, Y_1, \dots, [V, Y_j], \dots, Y_{k-1}). \end{aligned}$$

Subtraindo, os termos comuns cancelam-se, restando precisamente $\alpha([V, X], Y_1, \dots, Y_{k-1})$. O caso $k = 0$ é imediato, pois a contração de uma função é nula. □

13.6.6 Variação do pull-back

Podemos agora calcular a variação do pull-back ao longo da família geral F_t .

Proposição 13.46 (Derivada do pull-back por uma família de difeomorfismos). *Se X_t é o campo de velocidade associado a F_t , então*

$$\frac{d}{dt} F_t^* \phi = F_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \phi).$$

Demonstração. Fixemos t e, para h suficientemente pequeno, definamos

$$G_h := F_{t+h} \circ F_t^{-1}.$$

Temos

$$G_0 = \text{Id}, \quad F_{t+h} = G_h \circ F_t.$$

Pela regra de composição do pull-back,

$$F_{t+h}^* \phi = F_t^* (G_h^* \phi).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dh} G_h(y) \right|_{h=0} &= \left. \frac{d}{dh} F_{t+h}(F_t^{-1}(y)) \right|_{h=0} \\ &= \dot{F}_t(F_t^{-1}(y)) = X_t(y). \end{aligned}$$

Assim, G_h é uma deformação da identidade com velocidade inicial X_t . Logo,

$$\left. \frac{d}{dh} G_h^* \phi \right|_{h=0} = \mathcal{L}_{X_t} \phi.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \phi &= \left. \frac{d}{dh} F_{t+h}^* \phi \right|_{h=0} \\ &= F_t^* \left(\left. \frac{d}{dh} G_h^* \phi \right|_{h=0} \right) \\ &= F_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \phi). \end{aligned}$$

□

Exemplo 13.47 (Homotopia radial). Considere

$$F_t(x) = tx, \quad t > 0.$$

Para um ponto inicial x fixado,

$$y(t) = F_t(x) = tx, \quad \dot{y}(t) = x.$$

Se, no instante t , a posição atual é $y = tx$, então

$$x = \frac{y}{t}.$$

Logo o campo de velocidades escrito em função da posição atual é

$$X_t(y) = \frac{y}{t}.$$

Introduzindo o campo radial

$$R_y := \sum_{i=1}^N y^i \partial_i,$$

que, sob a identificação $T_y \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N$, corresponde precisamente ao vetor y , obtemos

$$X_t(y) = \frac{1}{t} R_y.$$

O fator $1/t$ provém, portanto, unicamente da passagem da posição inicial x para a posição atual $y = tx$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, se $x = (2, 1)$, então

$$F_t(x) = (2t, t), \quad \dot{y}(t) = (2, 1).$$

No instante $t = 1/2$, a posição atual é $y = (1, 1/2)$ e

$$X_{1/2}(y) = \frac{y}{1/2} = 2y = (2, 1),$$

como deve ser.

Nota 13.48. Um fluxo autônomo Φ_t gerado por um campo X satisfaz a relação particular

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x)),$$

na qual o campo de velocidades não depende explicitamente do tempo. Uma família geral F_t pode, ao contrário, possuir um campo gerador X_t dependente de t . A homotopia radial $F_t(x) = tx$ é deste segundo tipo quando parametrizada por t .

13.7 Pullback e naturalidade

O pull-back permite transportar formas diferenciais através de uma aplicação diferenciável. Ao contrário da diferencial dF , que transporta vetores tangentes do domínio para o espaço de chegada, o pull-back atua sobre covetores — e, mais geralmente, sobre formas diferenciais — no sentido oposto. Esta construção permite comparar formas definidas em variedades diferentes e desempenha um papel fundamental na invariância do cálculo exterior por mudanças de coordenadas.

Nesta secção reunimos as propriedades estruturais fundamentais do pull-back. Em particular, mostraremos que é compatível com o produto exterior,

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta,$$

e que comuta com a diferencial exterior,

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Estas propriedades serão utilizadas no capítulo seguinte, em particular na demonstração por homotopia do lema de Poincaré.

Proposição 13.49 (Naturalidade). *Para formas α, β e aplicações suaves composáveis,*

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta, \quad d(F^*\omega) = F^*(d\omega),$$

e

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

Assim, o pull-back define um morfismo da álgebra diferencial graduada

$$(\Omega^\bullet(N), \wedge, d) \longrightarrow (\Omega^\bullet(M), \wedge, d).$$

Demonstração. As três identidades foram demonstradas na subsecção anterior: a regra de composição segue da regra da cadeia, a compatibilidade com o produto exterior da definição alternada de $\wedge$, e a

compatibilidade com d da expressão local das formas e da regra da cadeia. Em conjunto, mostram que o pull-back preserva simultaneamente o produto exterior e a diferencial exterior, invertendo a direção das aplicações. $\square$

Nota 13.50. O pull-back é contravariante: uma forma definida no espaço de chegada é trazida para o espaço de partida. É exatamente o mesmo mecanismo utilizado anteriormente para a métrica induzida F^*e .

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A álgebra exterior tem a sua origem na *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann. A linguagem moderna dos multivetores, covetores e produtos exteriores desenvolve estruturas já presentes na obra de 1844. O passo decisivo para um cálculo diferencial de formas está associado a Élie Cartan, em particular ao seu trabalho de 1899 sobre expressões diferenciais e o problema de Pfaff, no qual o cálculo exterior assume uma forma sistemática.

Para a álgebra de Grassmann, uma referência moderna particularmente próxima da construção adotada neste capítulo é o Capítulo 2, “Grassmann algebra”, de *Geometric Measure Theory*, de Herbert Federer, pp. 8–49. Para o cálculo de formas diferenciais, usamos também do Carmo; Krantz e Parks apresentam o cálculo exterior numa perspectiva orientada para a integração geométrica, que será retomada no Capítulo 16.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

H. Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Otto Wigand, Leipzig, 1844.

É. Cartan, “Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff”, *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 3e série, 16 (1899), 239–332.

H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969, Cap. 2, “Grassmann algebra”, pp. 8–49.

M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994.

S. G. Krantz e H. R. Parks, *Geometric Integration Theory*, Birkhäuser, 2008.

Capítulo 14

Lema de Poincaré

Neste capítulo estudamos a questão fundamental que completa localmente a identidade $d^2 = 0$: em que condições uma forma fechada é exata? O lema de Poincaré responde afirmativamente em domínios suficientemente simples. Apresentamos duas demonstrações: uma construção direta em coordenadas e uma demonstração geométrica baseada no operador de homotopia. Todos os operadores utilizados na segunda demonstração — pull-back, derivada de Lie, contração e fórmula de Cartan — foram introduzidos no Capítulo 13.

14.1 Lema de Poincaré: formas fechadas são localmente exatas

A ideia fundamental é construtiva. Dada uma forma fechada ϕ , procuramos construir explicitamente uma forma α de grau imediatamente inferior tal que

$$d\alpha = \phi.$$

Num domínio estrelado, essa primitiva pode ser obtida contraindo continuamente o domínio sobre um ponto através de uma homotopia. Esta construção conduzirá ao operador de homotopia H e à identidade

$$dH + Hd = \text{Id}.$$

Em particular, quando $d\phi = 0$, teremos

$$\phi = d(H\phi),$$

de modo que $H\phi$ fornece explicitamente uma primitiva de ϕ .

Teorema 14.1 (Lema de Poincaré). *Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é estrelado relativamente a x_0 e $\phi \in \Omega^m(U)$, $m \geq 1$, é fechada, então existe $\alpha \in \Omega^{m-1}(U)$ tal que*

$$\phi = d\alpha.$$

Em particular, toda forma fechada é localmente exata, pois cada ponto de um aberto possui uma bola contida no aberto.

Demonstração. A demonstração pode ser feita de modo construtivo. Começemos numa caixa

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N] \subset U$$

e fixemos $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^N) \in Q$. Escrevemos

$$\phi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N} \phi_{i_1 \dots i_m}(u) du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_m}.$$

A condição $d\phi = 0$ significa que, para cada $i_0 < \dots < i_m$, o coeficiente de $du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$ é nulo. Explicitamente,

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial \phi_{i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_m}}{\partial u^{i_j}} = 0. \quad (14.1)$$

Aqui o acento $\widehat{}$ indica que o índice correspondente é omitido.

Construímos agora uma $(m-1)$ -forma α integrando sucessivamente as componentes de ϕ ao longo das direções coordenadas. Fixemos primeiro índices

$$i_1 < i_2 < \dots < i_m.$$

Ao procurar o coeficiente de $du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_m}$ em $d\alpha$, aparece em particular o coeficiente $\alpha_{i_2 i_3 \dots i_m}$, obtido eliminando o primeiro índice i_1 . É por esta razão que i_2 desempenha um papel particular na construção. Para este coeficiente, definimos

$$\alpha_{i_2 i_3 \dots i_m}(u) := \sum_{l=1}^{i_2-1} \int_{u_0^l}^{u^l} \phi_{l i_2 i_3 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, u^{l+1}, \dots, u^N) dv.$$

Mais geralmente, fixados $i_3 < \dots < i_m$, fazemos variar o primeiro índice $j < i_3$. Definimos

$$\alpha_{1 i_3 \dots i_m} := 0,$$

e, para $1 < j < i_3$,

$$\alpha_{j i_3 \dots i_m}(u) := \sum_{l=1}^{j-1} \int_{u_0^l}^{u^l} \phi_{l j i_3 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{l-1}, v, u^{l+1}, \dots, u^N) dv. \quad (14.2)$$

Tomamos

$$\alpha = \sum_{k_1 < \dots < k_{m-1}} \alpha_{k_1 \dots k_{m-1}} du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_{m-1}}.$$

Fixemos $i_1 < \dots < i_m$ e ponhamos

$$\Omega_I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_m}.$$

O coeficiente de Ω_I em $d\alpha$ é

$$\frac{\partial \alpha_{i_2 \dots i_m}}{\partial u^{i_1}} + \sum_{j=2}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots \widehat{i_j} \dots i_m}}{\partial u^{i_j}}. \quad (14.3)$$

Substituindo (14.2) em (14.3), separam-se dois tipos de termos. A derivação relativamente ao limite superior dos integrais fornece

$$A = \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{i_1-1}, u^{i_1}, \dots, u^N).$$

Nos restantes integrais, a identidade (14.1) permite substituir a soma das derivadas pelas derivadas relativamente à variável de integração. Pelo teorema fundamental do cálculo, cada integral é então uma diferença de valores de $\phi_{i_1 \dots i_m}$. Somando em l , obtém-se a soma telescópica

$$B = \phi_{i_1 \dots i_m}(u^1, \dots, u^N) - \phi_{i_1 \dots i_m}(u_0^1, \dots, u_0^{i_1-1}, u^{i_1}, \dots, u^N).$$

Consequentemente, $A + B = \phi_{i_1 \dots i_m}(u)$ para todo multi-índice I , e portanto

$$d\alpha = \phi.$$

Isto prova o resultado numa caixa e, em particular, localmente numa bola. Num domínio estrelado, a mesma construção é expressa de forma compacta pelo operador de homotopia radial; a integração ao longo dos segmentos que unem x_0 a x permanece inteiramente dentro de U , fornecendo uma primitiva global. $\square$

14.2 Operador de homotopia e segunda demonstração do lema de Poincaré

Nota 14.2 (Matéria avançada). Esta subsecção apresenta uma segunda demonstração do lema de Poincaré, mais geométrica, baseada na contração de formas diferenciais e numa homotopia radial. O argumento utiliza diretamente o pull-back, a derivada de Lie, a contração e a fórmula de Cartan desenvolvidos no Capítulo 13.

Teorema 14.3 (Segunda demonstração do lema de Poincaré num domínio estrelado). *Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é estrelado relativamente a 0 e $\phi \in \Omega^m(U)$, $m \geq 1$, satisfaz $d\phi = 0$, então existe $H\phi \in \Omega^{m-1}(U)$ tal que*

$$\phi = d(H\phi).$$

Demonstração. Como U é estrelado relativamente a 0, para cada $x \in U$ todo o segmento $t \mapsto tx$, $0 \leq t \leq 1$, permanece em U . Consideremos a homotopia radial

$$F_t : U \longrightarrow U, \quad F_t(x) := tx.$$

Temos $F_1 = \text{Id}$, enquanto F_0 é a aplicação constante com valor 0.

Se ϕ é uma m -forma, definimos o operador de homotopia

$$H : \Omega^m(U) \longrightarrow \Omega^{m-1}(U)$$

por

$$(H\phi)_x(v_1, \dots, v_{m-1}) := \int_0^1 t^{m-1} \phi_{tx}(x, v_1, \dots, v_{m-1}) dt. \quad (14.4)$$

O fator t^{m-1} aparece porque a diferencial de F_t multiplica por t cada um dos $m-1$ vetores $v_1, \dots, v_{m-1}$.

A fórmula (14.4) pode também ser escrita de maneira geométrica com o campo radial

$$R_y := \sum_{i=1}^N y^i \partial_i.$$

Antes de escrever essa fórmula, convém explicar por que razão intervém o *pull-back*. Para cada $t \in [0, 1]$ e $x \in U$, a forma

$$(\iota_R \phi)_{F_t(x)} = (\iota_R \phi)_{tx}$$

é uma $(m-1)$ -forma no ponto tx : atua, portanto, sobre vetores de $T_{tx}U$. Pelo contrário, $(H\phi)_x$ deve ser uma $(m-1)$ -forma no ponto x , isto é, deve atuar sobre vetores de T_xU . O pull-back

$$F_t^* : \Omega^{m-1}(U) \longrightarrow \Omega^{m-1}(U)$$

realiza precisamente este transporte: traz a forma situada em $F_t(x) = tx$ de volta ao ponto x através da diferencial de F_t .

Mais precisamente, se $\omega \in \Omega^{m-1}(U)$, a definição de pull-back dá

$$(F_t^* \omega)_x(v_1, \dots, v_{m-1}) := \omega_{tx}((dF_t)_x v_1, \dots, (dF_t)_x v_{m-1}).$$

Como

$$F_t(x) = tx, \quad (dF_t)_x v = tv,$$

segue, pela multilinearidade de ω , que

$$(F_t^* \omega)_x(v_1, \dots, v_{m-1}) = t^{m-1} \omega_{tx}(v_1, \dots, v_{m-1}).$$

Aplicando esta identidade a $\omega = \iota_R \phi$ e usando

$$R_{tx} = tx,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (F_t^*(\iota_R \phi))_x(v_1, \dots, v_{m-1}) &= t^{m-1}(\iota_R \phi)_{tx}(v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= t^{m-1}\phi_{tx}(R_{tx}, v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= t^m \phi_{tx}(x, v_1, \dots, v_{m-1}). \end{aligned}$$

Comparando com (14.4), vemos que

$$t^{m-1}\phi_{tx}(x, v_1, \dots, v_{m-1}) = \frac{1}{t}(F_t^*(\iota_R \phi))_x(v_1, \dots, v_{m-1}), \quad t > 0.$$

Consequentemente,

$$H\phi = \int_0^1 \frac{1}{t} F_t^*(\iota_R \phi) dt. \quad (14.5)$$

A expressão no integrando admite prolongamento contínuo em $t = 0$. Em particular, o fator $1/t$ não é arbitrário: compensa o fator adicional t proveniente de $R_{tx} = tx$.

Nota 14.4 (Por que é necessário o pull-back?). Num aberto de $\mathbb{R}^N$, todos os espaços tangentes $T_x U$ podem ser identificados canonicamente com $\mathbb{R}^N$. Por isso, numa escrita puramente coordenada, é tentador avaliar $(\iota_R \phi)_{tx}$ diretamente nos vetores $v_i \in T_x U$. Esta identificação esconde, porém, a geometria da construção. A forma $(\iota_R \phi)_{tx}$ vive em $T_{tx} U$, enquanto a forma que queremos obter vive em $T_x U$. O pull-back F_t^* é a operação intrínseca que efetua essa passagem e torna a fórmula independente dessa identificação particular dos espaços tangentes de um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Voltamos agora à homotopia radial. Para obter a identidade fundamental, derivamos o pull-back $F_t^* \phi$. Como vimos na subsecção anterior, para $t > 0$ o campo gerador da família $F_t(x) = tx$ satisfaz

$$X_t(y) = \frac{1}{t} R_y.$$

Como $X_t = \frac{1}{t} R$ e, para cada $t > 0$ fixado, o fator $1/t$ é constante relativamente às variáveis espaciais, a derivada de Lie é linear relativamente a este fator constante:

$$\mathcal{L}_{X_t} \phi = \mathcal{L}_{\frac{1}{t} R} \phi = \frac{1}{t} \mathcal{L}_R \phi.$$

Pela proposição sobre a derivada do pull-back, segue então que

$$\frac{d}{dt} F_t^* \phi = F_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \phi) = \frac{1}{t} F_t^*(\mathcal{L}_R \phi).$$

Pela fórmula de Cartan,

$$\mathcal{L}_R \phi = d(\iota_R \phi) + \iota_R(d\phi).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \phi &= \frac{1}{t} F_t^*(\mathcal{L}_R \phi) \\ &= \frac{1}{t} F_t^*(d(\iota_R \phi) + \iota_R(d\phi)) \\ &= \frac{1}{t} F_t^*(d(\iota_R \phi)) + \frac{1}{t} F_t^*(\iota_R(d\phi)). \end{aligned}$$

Neste ponto intervém explicitamente a compatibilidade entre o pull-back e a diferencial exterior, demonstrada na secção anterior. Para toda forma ω ,

$$\boxed{F_t^*(d\omega) = d(F_t^*\omega).}$$

Aplicando esta identidade à forma $\omega = \iota_R\phi$, obtemos

$$F_t^*(d(\iota_R\phi)) = d(F_t^*(\iota_R\phi)).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_t^*\phi &= \frac{1}{t}d(F_t^*(\iota_R\phi)) + \frac{1}{t}F_t^*(\iota_R(d\phi)) \\ &= d\left(\frac{1}{t}F_t^*(\iota_R\phi)\right) + \frac{1}{t}F_t^*(\iota_R(d\phi)). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, d atua apenas nas variáveis espaciais de U ; para cada $t > 0$ fixo, $1/t$ é portanto uma constante relativamente a d . Assim,

$$\boxed{\frac{d}{dt}F_t^*\phi = d\left(\frac{1}{t}F_t^*(\iota_R\phi)\right) + \frac{1}{t}F_t^*(\iota_R d\phi).}$$

Resta justificar cuidadosamente a integração desta identidade, em particular o fator aparentemente singular $1/t$. Para $t > 0$, ponhamos

$$\eta_t := \frac{1}{t}F_t^*(\iota_R\phi) \in \Omega^{m-1}(U).$$

Para $v_1, \dots, v_{m-1} \in T_x U$, usando $(dF_t)_x v = tv$ e $R_{tx} = tx$, obtemos

$$\begin{aligned} (\eta_t)_x(v_1, \dots, v_{m-1}) &= \frac{1}{t}\phi_{tx}(tx, tv_1, \dots, tv_{m-1}) \\ &= t^{m-1}\phi_{tx}(x, v_1, \dots, v_{m-1}). \end{aligned}$$

Assim, a singularidade $1/t$ é apenas aparente: η_t prolonga-se suavemente a $t = 0$. Se $m > 1$, o prolongamento vale 0 em $t = 0$; se $m = 1$, vale $\phi_0(x)$.

Consequentemente, em coordenadas locais podemos escrever

$$\eta_t = \sum_I a_I(t, x) dx^I,$$

com a_I suaves em $[0, 1] \times U$. Em cada compacto $K \Subset U$, as derivadas espaciais $\partial_{x^j} a_I$ são contínuas e, portanto, uniformemente limitadas em $[0, 1] \times K$. O teorema de derivação sob o sinal integral permite então escrever

$$\begin{aligned} d\left(\int_0^1 \eta_t dt\right) &= \sum_{I,j} \partial_{x^j} \left(\int_0^1 a_I(t, x) dt\right) dx^j \wedge dx^I \\ &= \sum_{I,j} \left(\int_0^1 \partial_{x^j} a_I(t, x) dt\right) dx^j \wedge dx^I \\ &= \int_0^1 d\eta_t dt. \end{aligned}$$

Logo

$$\boxed{d\left(\int_0^1 \eta_t dt\right) = \int_0^1 d\eta_t dt.}$$

O segundo termo que será integrado contém o mesmo fator $1/t$, mas também se prolonga suavemente a $t = 0$. De facto, como $d\phi$ é uma $(m+1)$ -forma,

$$\frac{1}{t}(F_t^*(\iota_R d\phi))_x(v_1, \dots, v_m) = t^m(d\phi)_{tx}(x, v_1, \dots, v_m).$$

Portanto, nenhum dos integrais seguintes é impróprio.

Pelo prolongamento suave acabado de demonstrar, a fórmula

$$H\phi := \int_0^1 \eta_t dt = \int_0^1 \frac{1}{t} F_t^*(\iota_R \phi) dt$$

é entendida em todo o intervalo fechado $[0, 1]$ e não como um integral impróprio. Analogamente,

$$H(d\phi) = \int_0^1 \frac{1}{t} F_t^*(\iota_R d\phi) dt.$$

Integrando agora a identidade anterior entre 0 e 1 e usando o teorema fundamental do cálculo no membro esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} F_1^*\phi - F_0^*\phi &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^*\phi dt \\ &= \int_0^1 d\eta_t dt + \int_0^1 \frac{1}{t} F_t^*(\iota_R d\phi) dt \\ &= d\left(\int_0^1 \eta_t dt\right) + H(d\phi) \\ &= d(H\phi) + H(d\phi). \end{aligned}$$

Como $m \geq 1$, o pull-back de uma m -forma por uma aplicação constante é nulo, isto é,

$$F_0^*\phi = 0,$$

e $F_1^*\phi = \phi$. Logo

$$\boxed{dH + Hd = \text{Id} \quad \text{em } \Omega^m(U), \quad m \geq 1.} \quad (14.6)$$

Finalmente, se $d\phi = 0$, (14.6) dá

$$\phi = d(H\phi) + H(d\phi) = d(H\phi),$$

pelo que $H\phi$ é uma primitiva explícita de ϕ . □

Exemplo 14.5 (Cálculo explícito do operador de homotopia). Em $\mathbb{R}^2$, considere

$$\phi = dx \wedge dy.$$

Pela definição (14.4), para $v = a\partial_x + b\partial_y$,

$$(H\phi)_x(v) = \int_0^1 t \phi_{tx}(x\partial_x + y\partial_y, v) dt = \frac{1}{2}(xb - ya).$$

Portanto

$$H\phi = \frac{1}{2}(x dy - y dx).$$

Derivando,

$$\begin{aligned} d(H\phi) &= \frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) \\ &= dx \wedge dy = \phi. \end{aligned}$$

Neste exemplo vê-se diretamente como o operador H constrói uma primitiva de uma forma fechada.

Nota 14.6. A construção por homotopia radial exprime geometricamente a mesma ideia da demonstração coordenada anterior: integra-se ao longo dos segmentos que ligam o ponto base aos restantes pontos do domínio. O operador H reúne essa construção numa identidade única, $dH + Hd = \text{Id}$, e prepara a relação entre fluxo, derivada de Lie, contração e derivada exterior desenvolvida mais adiante.

14.3 Hipóteses topológicas e exemplos

O lema anterior é local. A passagem de “fechada” a “exata” em todo o domínio contém informação topológica.

Proposição 14.7 (Caso das 1-formas). *Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, conexo e simplesmente conexo, toda 1-forma fechada $\omega \in \Omega^1(U)$ é exata.*

Demonstração. Fixe $x_0 \in U$. Para $x \in U$, escolha um caminho regular por partes γ de x_0 a x e defina

$$f(x) := \int_{\gamma} \omega.$$

Se $\tilde{\gamma}$ é outro caminho com os mesmos extremos, a simples conexidade fornece uma homotopia entre γ e $\tilde{\gamma}$ com extremos fixos. Como $d\omega = 0$, a versão local do lema de Poincaré, aplicada ao longo de uma cobertura finita da homotopia por bolas, mostra que o integral não varia durante a deformação. Logo f não depende do caminho. Calculando a derivada de f numa direção v , usando um pequeno segmento final na direção v , obtemos

$$df_x(v) = \omega_x(v).$$

Portanto $df = \omega$. □

Nota 14.8 (Graus superiores). Para $m > 1$, a simples conexidade não é suficiente, em geral, para concluir que toda m -forma fechada é globalmente exata. Uma hipótese suficiente é que o domínio seja estrelado ou, mais geralmente, contractível. Assim, a formulação global para graus arbitrários exige uma hipótese topológica mais forte do que a necessária para 1-formas.

Exemplo 14.9 (Campo irrotacional e potencial escalar). Em $\mathbb{R}^3$, seja

$$U = P e_1 + Q e_2 + R e_3, \quad \omega = P dx + Q dy + R dz.$$

Um cálculo direto dá

$$d\omega = (Q_{,x} - P_{,y}) dx \wedge dy + (R_{,y} - Q_{,z}) dy \wedge dz + (P_{,z} - R_{,x}) dz \wedge dx.$$

Logo

$$d\omega = 0 \iff \text{curl } U = 0.$$

Num domínio simplesmente conexo, a proposição anterior fornece $\omega = df$, isto é,

$$U = \text{grad } f.$$

Exemplo 14.10 (Campo sem divergência e potencial vetor). Considere a 2-forma

$$\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy.$$

Então

$$d\omega = (P_{,x} + Q_{,y} + R_{,z}) \, dx \wedge dy \wedge dz,$$

pelo que

$$d\omega = 0 \iff \text{div } U = 0.$$

Localmente, ou globalmente num domínio contractível, o lema de Poincaré fornece uma 1-forma

$$\alpha = a \, dx + b \, dy + c \, dz$$

tal que $\omega = d\alpha$. Em linguagem vetorial, isto corresponde à existência de um potencial vetor A com

$$U = \text{curl } A.$$

Exemplo 14.11 (Uma forma fechada que não é globalmente exata). No domínio

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

considere

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy.$$

Escrevendo $P = -y/(x^2 + y^2)$ e $Q = x/(x^2 + y^2)$, verifica-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

e portanto $d\omega = 0$.

Em qualquer região onde se possa escolher continuamente um argumento $\theta = \arg(x + iy)$,

$$\omega = d\theta,$$

pelo que a forma é localmente exata. Contudo, sobre a circunferência unitária $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Se $\omega = df$ globalmente, o integral sobre qualquer curva fechada seria zero. Logo ω não é exata em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Este exemplo mostra concretamente a obstrução topológica à existência de um potencial global.

Exemplo 14.12 (Exatidão de 1-formas simples). Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as formas

$$\omega_1 = 3y \, dx + x \, dy, \quad \omega_2 = y \, dx + x \, dy, \quad \omega_3 = e^x y \, dx + e^x \, dy.$$

Temos

$$d\omega_1 = (1 - 3) dx \wedge dy = -2 dx \wedge dy,$$

pelo que ω_1 não é fechada. Por outro lado,

$$d\omega_2 = 0, \quad \omega_2 = d(xy),$$

e

$$d\omega_3 = 0, \quad \omega_3 = d(e^x y).$$

Assim, os cálculos de $d\omega$ permitem decidir imediatamente quais destas formas podem admitir um potencial.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A identidade $d^2 = 0$ transforma $(\Omega^*(M), d)$ num complexo diferencial. O lema de Poincaré mostra que este complexo é localmente exato em grau positivo; a obstrução global à exatidão conduz à cohomologia de de Rham.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994.
L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Springer, 2011.

Capítulo 15

Transporte, volume e operadores de Hodge

Este capítulo aplica o cálculo exterior desenvolvido no Capítulo 13 à geometria riemanniana. Começamos pela métrica, pela forma de volume e pela sua variação sob fluxos; estudamos depois a divergência, a incompressibilidade e as simetrias infinitesimais da métrica. O capítulo termina com o operador de Hodge, o codiferencial e o Laplaciano de Hodge, que combinam a estrutura métrica com a diferencial exterior.

15.1 A métrica, o teorema de Riesz e os isomorfismos musicais

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e $p \in M$. A métrica g_p é um produto interno no espaço tangente $T_p M$. Como $T_p M$ tem dimensão finita, $(T_p M, g_p)$ é um espaço de Hilbert e toda a forma linear

$$\alpha : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

é automaticamente contínua. Podemos, portanto, aplicar o teorema de representação de Riesz.

Teorema 15.1 (Representação de Riesz em dimensão finita). *Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Para toda a forma linear $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único vetor $y \in V$ tal que*

$$\ell(x) = \langle y, x \rangle \quad \text{para todo } x \in V.$$

Aplicado a $V = T_p M$ e ao produto interno g_p , este resultado identifica, através da métrica, vetores tangentes e covetores.

Definição 15.2 (Isomorfismos musicais). Para $X \in T_p M$, define-se o covetor

$$X^\flat := g_p(X, \cdot),$$

isto é,

$$X^\flat(Y) = g_p(X, Y), \quad Y \in T_p M.$$

Obtém-se assim uma aplicação linear

$$\flat : T_p M \longrightarrow T_p^* M, \quad X \longmapsto X^\flat.$$

Reciprocamente, pelo teorema de Riesz, para cada $\alpha \in T_p^*M$ existe um único vetor $\alpha^\sharp \in T_pM$ caracterizado por

$$g_p(\alpha^\sharp, X) = \alpha(X) \quad \text{para todo } X \in T_pM.$$

Define-se deste modo

$$\sharp : T_p^*M \longrightarrow T_pM, \quad \alpha \longmapsto \alpha^\sharp.$$

As aplicações $\flat$ e $\sharp$ são inversas e chamam-se *isomorfismos musicais*.

Exemplo 15.3 (Métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$). Para

$$g = dx^2 + dy^2, \quad X = 2\partial_x - 3\partial_y,$$

temos

$$X^\flat = 2dx - 3dy.$$

Reciprocamente,

$$(2dx - 3dy)^\sharp = 2\partial_x - 3\partial_y.$$

Neste caso, a matriz da métrica é a identidade, razão pela qual as componentes de X e de $X^\flat$ coincidem.

Exemplo 15.4 (Uma métrica diagonal não euclidiana). Considere em $\mathbb{R}^2$

$$g = 4dx^2 + dy^2$$

e

$$X = 2\partial_x + 3\partial_y.$$

Então

$$X^\flat = g(X, \cdot) = 8dx + 3dy.$$

Logo

$$(8dx + 3dy)^\sharp = 2\partial_x + 3\partial_y.$$

Este exemplo mostra que a passagem de um vetor ao covetor associado depende efetivamente da métrica.

Exemplo 15.5 (Uma métrica com termos cruzados). Suponha que, numa carta (x, y) ,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para $X = X^1\partial_x + X^2\partial_y$,

$$X^\flat = (2X^1 + X^2)dx + (X^1 + 3X^2)dy.$$

Como

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

se $\alpha = a dx + b dy$, então

$$\alpha^\sharp = \frac{3a - b}{5} \partial_x + \frac{-a + 2b}{5} \partial_y.$$

Por exemplo,

$$(5 dx + 5 dy)^\sharp = 2 \partial_x + \partial_y.$$

Em coordenadas locais, se

$$X = X^j \partial_j, \quad \alpha = \alpha_i dx^i,$$

então

$$X^\flat = g_{ij} X^j dx^i, \quad \alpha^\sharp = g^{ij} \alpha_j \partial_i.$$

Estas operações são tradicionalmente descritas como *baixar* e *levantar* índices.

Nota 15.6. Os espaços vetoriais $T_p M$ e $T_p^* M$ têm a mesma dimensão, mas a identificação acima depende da métrica g_p . Os símbolos $\flat$ e $\sharp$ registam precisamente essa dependência.

15.2 Produto interno em covetores e forma de volume

A métrica induz também um produto interno no espaço cotangente. Para $\alpha, \beta \in T_p^* M$, define-se

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{g^{-1}} := g_p(\alpha^\sharp, \beta^\sharp).$$

Em coordenadas,

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{g^{-1}} = g^{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ euclidiano,

$$\langle 2dx - dy, dx + 3dy \rangle = 2 - 3 = -1.$$

Se (M, g) é uma variedade riemanniana orientada de dimensão n , a métrica induz um produto interno em $\Lambda^n T_p^* M$. Para formas simples,

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m \rangle := \det(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle)_{i,j}.$$

Em coordenadas orientadas, a forma de volume é

$$\text{vol}_g := \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad |g| := \det(g_{ij}).$$

15.3 Volume, divergência e incompressibilidade

Se (M, g) é uma variedade riemanniana orientada de dimensão n , seja μ_g a forma volume. A derivada de Lie da forma volume mede a taxa local de variação do volume sob o fluxo.

Proposição 15.7 (Divergência como variação do volume). *Para todo campo vetorial X ,*

$$\mathcal{L}_X \mu_g = (\text{div } X) \mu_g.$$

Demonstração. Em coordenadas locais,

$$\mu_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Como $d\mu_g = 0$ por razões de grau, a fórmula de Cartan dá

$$\mathcal{L}_X \mu_g = d(\iota_X \mu_g).$$

Escrevendo

$$\iota_X \mu_g = \sqrt{|g|} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

segue que

$$d(\iota_X \mu_g) = \partial_i (\sqrt{|g|} X^i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Logo

$$\mathcal{L}_X \mu_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i) \mu_g = (\operatorname{div} X) \mu_g.$$

□

Assim,

$$\boxed{\operatorname{div} X = 0 \iff \mathcal{L}_X \mu_g = 0.}$$

O campo é então infinitesimalmente conservativo de volume. Na mecânica dos fluidos, esta é a condição cinemática de incompressibilidade.

Exemplo 15.8 (Campo incompressível). Em $\mathbb{R}^2$,

$$X = -y\partial_x + x\partial_y$$

tem

$$\operatorname{div} X = \partial_x(-y) + \partial_y x = 0.$$

O seu fluxo é uma rotação, que preserva áreas.

Exemplo 15.9 (Dilatação). Em $\mathbb{R}^n$, para $R = x^i \partial_i$,

$$\operatorname{div} R = n.$$

Portanto

$$\mathcal{L}_R \mu = n\mu.$$

O fluxo $\sigma_t(x) = e^t x$ multiplica os comprimentos por e^t e os volumes por e^{nt} ; a derivada em $t = 0$ é precisamente n .

15.4 Variação da métrica, deformação e campos de Killing

Consideremos agora um corpo cujos pontos se movem segundo o fluxo de um campo de velocidade X . A métrica g mede comprimentos e ângulos. A quantidade $\mathcal{L}_X g$ mede, portanto, a variação infinitesimal dessas grandezas quando o corpo é transportado pelo movimento.

Proposição 15.10 (Derivada de Lie da métrica). *Em coordenadas locais,*

$$\boxed{(\mathcal{L}_X g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k.}$$

Para a conexão de Levi-Civita,

$$\boxed{(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.}$$

Intrinsecamente,

$$\boxed{(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).}$$

Demonstração. Pela definição do pullback de um tensor covariante,

$$(\sigma_t^* g)_p(Y_p, Z_p) = g_{\sigma_t(p)}((\sigma_t)_* Y_p, (\sigma_t)_* Z_p).$$

Em coordenadas, usando

$$\sigma_t^k(x) = x^k + tX^k(x) + O(t^2), \quad \partial_i \sigma_t^k = \delta_i^k + t\partial_i X^k + O(t^2),$$

temos

$$(\sigma_t^* g)_{ij} = g_{kl}(\sigma_t(x)) \partial_i \sigma_t^k \partial_j \sigma_t^l.$$

Derivando em $t = 0$,

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k.$$

Para a conexão de Levi-Civita,

$$\nabla_i X_j = \partial_i X_j - \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Usando $X_j = g_{jk} X^k$, a compatibilidade métrica $\nabla g = 0$ e a simetria $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, a expressão anterior reorganiza-se como

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

A forma intrínseca é a mesma identidade avaliada nos campos Y e Z . □

Definição 15.11 (Tensor taxa de deformação). Em espaço euclidiano, define-se

$$D(X) := \frac{1}{2}(\nabla X + (\nabla X)^T).$$

Como $g_{ij} = \delta_{ij}$,

$$D(X) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g.$$

Esta identidade dá um significado geométrico ao tensor taxa de deformação: ele mede metade da variação infinitesimal da métrica produzida pelo campo de velocidade.

Exemplo 15.12 (Rotação rígida). Em $\mathbb{R}^2$, para

$$X = -\omega y \partial_x + \omega x \partial_y,$$

temos

$$\nabla X = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad D(X) = 0.$$

Logo

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

A velocidade é não nula, mas o movimento é uma rotação rígida: não há deformação.

Exemplo 15.13 (Dilatação uniforme). Para $X = \lambda x^i \partial_i$ em $\mathbb{R}^n$,

$$\nabla X = \lambda I, \quad D(X) = \lambda I,$$

e portanto

$$\mathcal{L}_X g = 2\lambda g.$$

As distâncias variam: o movimento não é rígido.

Definição 15.14 (Campo de Killing). Um campo vetorial X é um *campo de Killing* se

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

Equivalentemente, o seu fluxo local é constituído por isometrias. Em coordenadas, as equações de Killing são

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0.$$

Assim, os campos de Killing são os geradores infinitesimais dos movimentos que preservam a métrica. Em mecânica, correspondem localmente às velocidades de movimentos rígidos; em geometria, descrevem as simetrias contínuas da métrica.

Nota 15.15 (Derivada de Lie e derivada covariante). As duas operações respondem a perguntas diferentes. A derivada covariante $\nabla_Y T$ compara valores de um tensor em pontos vizinhos recorrendo a uma conexão. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X T$ mede a variação de T sob o transporte produzido pelo fluxo de X e não necessita de escolher uma conexão. Quando uma conexão está presente, como a de Levi-Civita, as duas construções podem naturalmente ser relacionadas, como mostra a identidade

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

15.5 Operador dual de Hodge

Definição 15.16 (Dual de Hodge). O operador de Hodge

$$*: \Omega^m(M) \longrightarrow \Omega^{n-m}(M)$$

é definido pela identidade

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{vol}_g$$

para todas $\alpha, \beta \in \Omega^m(M)$.

Em $\mathbb{R}^3$ com a orientação usual,

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy,$$

e

$$*(dx \wedge dy) = dz, \quad *(dy \wedge dz) = dx, \quad *(dz \wedge dx) = dy.$$

Proposição 15.17 (Quadrado do operador de Hodge). Numa variedade riemanniana orientada de dimensão n ,

$$**\omega = (-1)^{m(n-m)}\omega, \quad \omega \in \Omega^m(M).$$

Demonstração. Fixemos $p \in M$ e uma base ortonormada positivamente orientada $(e_1, \dots, e_n)$ de $T_p M$, com base dual $(e^1, \dots, e^n)$. Para um multiíndice crescente $I = (i_1, \dots, i_m)$, escrevemos $e^I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m}$ e designamos por I^c o multiíndice complementar, também crescente. Pela definição do operador de Hodge,

$$*e^I = \varepsilon(I, I^c)e^{I^c},$$

onde $\varepsilon(I, I^c) \in \{-1, 1\}$ é o sinal da permutação que ordena a concatenação (I, I^c) em $(1, \dots, n)$. Aplicando novamente $*$,

$$**e^I = \varepsilon(I, I^c)\varepsilon(I^c, I)e^I.$$

A passagem de (I, I^c) para (I^c, I) exige $m(n-m)$ transposições, pelo que

$$\varepsilon(I^c, I) = (-1)^{m(n-m)}\varepsilon(I, I^c).$$

Como $\varepsilon(I, I^c)^2 = 1$, resulta $**e^I = (-1)^{m(n-m)}e^I$. As formas e^I constituem uma base de $\Lambda^m(T_p^*M)$; a linearidade e a arbitrariedade de p concluem a demonstração. $\square$

Exemplo 15.18 (A estrela de Hodge e os índices complementares). Seja $(e^1, \dots, e^n)$ uma base ortonormada positivamente orientada de T_p^*M . Para um multiíndice crescente $I = (i_1, \dots, i_m)$, escrevemos

$$e^I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m}.$$

O multiíndice I^c contém os índices que faltam em I , dispostos por ordem crescente. A fórmula

$$*e^I = \varepsilon(I, I^c)e^{I^c}$$

exprime que a estrela de Hodge associa a e^I as direções complementares, com o sinal que respeita a orientação. Aqui $\varepsilon(I, I^c)$ vale $+1$ ou -1 consoante a permutação necessária para ordenar (I, I^c) como $(1, \dots, n)$ seja par ou ímpar.

Em dimensão três, por exemplo,

$$*(e^1 \wedge e^2) = e^3, \quad *(e^1 \wedge e^3) = -e^2, \quad *(e^2 \wedge e^3) = e^1.$$

No primeiro caso, $(1, 2, 3)$ já está ordenada; no segundo, $(1, 3, 2)$ exige uma transposição. O sinal garante, em todos os casos,

$$e^I \wedge *e^I = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \text{vol}_g.$$

Assim, a métrica determina as direções ortonormais e a orientação determina o sinal.

Exemplo 15.19 (Contração da forma de volume e estrela de Hodge). Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientada, de dimensão n , com forma de volume vol_g . Para qualquer campo vetorial X ,

$$\iota_X \text{vol}_g = *X^\flat.$$

Com efeito, numa base ortonormada positivamente orientada $(e_1, \dots, e_n)$, escrevendo $X = \sum_i X^i e_i$ e denotando por $(e^1, \dots, e^n)$ a base dual, resulta

$$\iota_X \text{vol}_g = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X^i e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^n = \sum_i X^i *e^i = *X^\flat.$$

Em $\mathbb{R}^3$, a identidade toma a forma explícita

$$\iota_X(dx \wedge dy \wedge dz) = X^1 dy \wedge dz + X^2 dz \wedge dx + X^3 dx \wedge dy.$$

Recordando a identidade entre derivada de Lie e divergência demonstrada na Secção 15.3, obtemos ainda

$$d(*X^\flat) = d(\iota_X \text{vol}_g) = (\text{div}_g X) \text{vol}_g.$$

15.5.1 Área orientada e formas de fluxo

Seja $S \subset M$ uma hipersuperfície orientada numa variedade riemanniana orientada (M, g) de dimensão n . Escolhamos a normal unitária ν compatível com a orientação de S , isto é, de modo que $(\nu, e_1, \dots, e_{n-1})$ seja uma base positivamente orientada de TM sempre que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ seja uma base ortonormada positivamente orientada de TS .

Proposição 15.20 (Forma de área induzida e representação do fluxo). *Denotando por $j : S \hookrightarrow M$ a inclusão canónica, a forma de área orientada de S satisfaz*

$$dS = j^*(\iota_\nu \text{vol}_g).$$

Para qualquer campo vetorial X definido junto de S , tem-se

$$j^*(\iota_X \text{vol}_g) = g(X, \nu) dS,$$

$$\int_S \iota_X \text{vol}_g = \int_S g(X, \nu) dS.$$

Na última integral, o pullback pela inclusão está subentendido.

Demonstração. A $(n-1)$ -forma $j^*(\iota_\nu \text{vol}_g)$ toma o valor 1 sobre qualquer base ortonormada positivamente orientada $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $T_p S$, pois $\text{vol}_g(\nu, e_1, \dots, e_{n-1}) = 1$. Logo, coincide com a forma de volume da métrica induzida em S .

Para vetores $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p S$, decomponhamos $X = g(X, \nu)\nu + X_T$, com $X_T \in T_p S$. Como $X_T, v_1, \dots, v_{n-1}$ são n vetores de um espaço de dimensão $n-1$, a alternância da forma de volume implica

$$\begin{aligned} (j^* \iota_X \text{vol}_g)_p(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \text{vol}_g(X, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= g(X, \nu) \text{vol}_g(\nu, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= g(X, \nu) dS_p(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

A identidade integral segue pela definição da integração de formas diferenciais. $\square$

Exemplo 15.21 (Fluxo clássico numa superfície em $\mathbb{R}^3$). Para $S \subset \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in T_p S$,

$$(\iota_X \text{vol})(v_1, v_2) = X \cdot (v_1 \times v_2) = (X \cdot \nu) dS(v_1, v_2),$$

porque $v_1 \times v_2 = dS(v_1, v_2)\nu$. Assim, a forma $*X^\flat$ do Exemplo 15.19 é precisamente a forma diferencial do fluxo.

15.6 Gradiente, rotacional e divergência em linguagem exterior

Consideremos $\mathbb{R}^3$ com a métrica euclidiana e a orientação dada por $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$. Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $U = U^1 \partial_x + U^2 \partial_y + U^3 \partial_z$. A 1-forma associada a U é

$$U^\flat = U^1 dx + U^2 dy + U^3 dz.$$

Gradiente. Da expressão $df = (\partial_x f)dx + (\partial_y f)dy + (\partial_z f)dz$ e da definição de $\sharp$ obtemos

$$\text{grad } f = (df)^\sharp = (\partial_x f)\partial_x + (\partial_y f)\partial_y + (\partial_z f)\partial_z.$$

Rotacional. Pela regra de Leibniz para d ,

$$\begin{aligned} d(U^\flat) &= (\partial_y U^3 - \partial_z U^2) dy \wedge dz \\ &\quad + (\partial_z U^1 - \partial_x U^3) dz \wedge dx \\ &\quad + (\partial_x U^2 - \partial_y U^1) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Usando $*(dy \wedge dz) = dx$, $*(dz \wedge dx) = dy$ e $*(dx \wedge dy) = dz$, segue-se

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} U &= (*dU^\flat)^\sharp = (\partial_y U^3 - \partial_z U^2) \partial_x \\ &\quad + (\partial_z U^1 - \partial_x U^3) \partial_y \\ &\quad + (\partial_x U^2 - \partial_y U^1) \partial_z. \end{aligned}$$

Divergência. Como

$$*U^\flat = U^1 dy \wedge dz + U^2 dz \wedge dx + U^3 dx \wedge dy,$$

temos

$$d(*U^\flat) = (\partial_x U^1 + \partial_y U^2 + \partial_z U^3) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Por conseguinte,

$$\operatorname{div} U = *d * U^\flat = \partial_x U^1 + \partial_y U^2 + \partial_z U^3.$$

Estas expressões recuperam os operadores clássicos do cálculo vetorial. Além disso, $d^2 = 0$ implica

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{curl} U) = 0.$$

Exemplo 15.22 (Cálculo do rotacional). Para $U = -y\partial_x + x\partial_y$, temos $U^\flat = -y dx + x dy$ e $dU^\flat = 2 dx \wedge dy$. Logo $*dU^\flat = 2 dz$ e $\operatorname{curl} U = 2\partial_z$.

Exemplo 15.23 (Cálculo da divergência). Para $U = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$, obtemos $*U^\flat = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Assim, $d * U^\flat = 3 dx \wedge dy \wedge dz$ e $\operatorname{div} U = 3$.

15.7 Codiferencial e Laplaciano de Hodge

Definição 15.24 (Codiferencial). Para $\omega \in \Omega^m(M)$, $m \geq 1$, define-se

$$\delta\omega := (-1)^{n(m+1)+1} * d * \omega.$$

Assim, $\delta : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$; nas funções, convencionou-se $\delta f = 0$.

Definição 15.25 (Laplaciano de Hodge). O Laplaciano de Hodge é o operador

$$\Delta_H := d\delta + \delta d : \Omega^m(M) \longrightarrow \Omega^m(M).$$

Em $\mathbb{R}^3$, a fórmula do codiferencial dá $\delta\alpha = -*d*\alpha$ para 1-formas e $\delta\beta = *d*\beta$ para 2-formas.

Proposição 15.26 (Laplaciano de Hodge em funções). *Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,*

$$\Delta_H f = -(\partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f) = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Demonstração. Como $\delta f = 0$, vale $\Delta_H f = \delta(df) = -*d*df$. Ora,

$$*df = (\partial_x f)dy \wedge dz + (\partial_y f)dz \wedge dx + (\partial_z f)dx \wedge dy.$$

Derivando,

$$d*df = (\partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Como $*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$, obtemos a identidade pretendida. $\square$

Definição 15.27 (Laplaciano de Laplace–Beltrami). *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Para $f \in C^\infty(M)$, define-se o Laplaciano de Laplace–Beltrami por*

$$\Delta_g f := \operatorname{div}_g(\operatorname{grad}_g f).$$

Esta convenção coincide, no espaço euclidiano, com $\Delta f = \sum_i \partial_{ii} f$.

Proposição 15.28 (Expressão local do Laplaciano de Laplace–Beltrami). *Em coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$, com $g = (g_{ij})$ e $(g^{ij}) = g^{-1}$, vale*

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f \right).$$

Em particular, Δ_g depende apenas da métrica riemanniana.

Demonstração. Pela definição do gradiente, $g(\operatorname{grad}_g f, X) = df(X)$ para todo campo X . Se $\operatorname{grad}_g f = V^i \partial_i$, tomando $X = \partial_j$ obtemos $g_{ij} V^i = \partial_j f$, isto é,

$$\operatorname{grad}_g f = g^{ij} (\partial_j f) \partial_i.$$

Por outro lado, a fórmula da divergência riemanniana, estabelecida na Secção 15.3 a partir da forma de volume $\operatorname{vol}_g = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, é

$$\operatorname{div}_g V = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} V^i).$$

Substituindo $V^i = g^{ij} \partial_j f$, concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 15.29 (Relação com o Laplaciano de Hodge em funções). *Em qualquer variedade riemanniana orientada,*

$$\Delta_H f = -\Delta_g f, \quad f \in C^\infty(M).$$

Demonstração. Como $\delta f = 0$, temos $\Delta_H f = \delta df$. Para uma 1-forma $\alpha = X^\flat$, a definição do codiferencial e a identidade $\iota_X \operatorname{vol}_g = *X^\flat$ fornecem

$$\delta \alpha = -*d*\alpha = -*d(\iota_X \operatorname{vol}_g) = -\operatorname{div}_g X.$$

Na última igualdade usamos $d(\iota_X \operatorname{vol}_g) = \mathcal{L}_X \operatorname{vol}_g = (\operatorname{div}_g X) \operatorname{vol}_g$. Aplicando a $\alpha = df = (\operatorname{grad}_g f)^\flat$, obtemos $\Delta_H f = -\operatorname{div}_g(\operatorname{grad}_g f)$. $\square$

Exemplo 15.30 (Laplaciano de Laplace–Beltrami na esfera). Na esfera de raio R , usamos a colatitude $\theta \in (0, \pi)$ e a longitude φ . A métrica induzida é

$$g = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad \sqrt{\det g} = R^2 \sin \theta.$$

A fórmula local dá

$$\Delta_g f = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi \partial_\varphi f.$$

Em particular, para $f(\theta, \varphi) = \cos \theta$, obtemos

$$\Delta_g f = -\frac{2}{R^2} \cos \theta = -\frac{2}{R^2} f, \quad \Delta_H f = \frac{2}{R^2} f.$$

Embora escritas nestas coordenadas, as identidades são intrínsecas e prolongam-se aos polos.

Proposição 15.31 (Laplaciano de Hodge em campos vetoriais). *Se U é um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = U^\flat$, então*

$$(\Delta_H \alpha)^\sharp = \operatorname{curl}(\operatorname{curl} U) - \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) = -\Delta U,$$

onde $\Delta U := \sum_{i=1}^3 (\partial_{xx} U^i + \partial_{yy} U^i + \partial_{zz} U^i) \partial_i$.

Demonstração. Para uma 1-forma em dimensão três, $\delta \alpha = - * d * \alpha = -\operatorname{div} U$. Portanto,

$$(d\delta \alpha)^\sharp = -\operatorname{grad}(\operatorname{div} U).$$

Por outro lado, $d\alpha$ é uma 2-forma e, nesse grau, $\delta(d\alpha) = * d * (d\alpha)$. Como $*d\alpha = (\operatorname{curl} U)^\flat$, segue-se

$$(\delta d\alpha)^\sharp = \operatorname{curl}(\operatorname{curl} U).$$

Somando os dois termos, obtemos a primeira igualdade. A segunda decorre da identidade clássica

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} U) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) - \Delta U,$$

que também se verifica diretamente pela expansão das três componentes. $\square$

Nota 15.32 (Identidade de Weitzenböck e curvatura de Ricci). Para uma 1-forma α numa variedade riemanniana, a identidade de Weitzenböck relaciona o Laplaciano de Hodge com o Laplaciano da conexão de Levi–Civita:

$$\Delta_H \alpha = \nabla^* \nabla \alpha + \operatorname{Ric}(\alpha).$$

Aqui $\operatorname{Ric}(\alpha)$ designa a ação, sobre 1-formas, do endomorfismo associado ao tensor de Ricci; e $\nabla^* \nabla$ é o Laplaciano de conexão, com convenção de sinal não negativa, que num referencial ortonormado local (e_i) se escreve

$$\nabla^* \nabla \alpha = - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \alpha - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \alpha).$$

Esta identidade mostra que, ao passar de funções para 1-formas, a curvatura intervém na comparação de dois operadores diferenciais intrínsecos. No caso euclidiano, $\operatorname{Ric} = 0$ e recuperamos o Laplaciano aplicado componente a componente com sinal negativo. A demonstração geral da identidade de Weitzenböck ultrapassa o âmbito desta introdução.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

A linguagem do transporte por fluxos, desenvolvida por Sophus Lie e Élie Cartan, permite caracterizar geometricamente a preservação do volume e as simetrias infinitesimais da métrica. O operador de Hodge liga depois a álgebra exterior à estrutura riemanniana: enquanto d é definido sem métrica, $*$, δ e Δ_H dependem da métrica e da orientação.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

- F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer.
M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser.
J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer.
G. Schwarz, *Hodge Decomposition—A Method for Solving Boundary Value Problems*, Springer.

Capítulo 16

Integração de formas e teorema de Stokes

16.1 Integração e orientação

Se M é uma variedade orientada de dimensão m , uma m -forma compactamente suportada pode ser integrada utilizando cartas orientadas e uma partição da unidade. No caso parametrizado $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$,

$$\int_{F(U)} \omega := \int_U F^* \omega.$$

Esta fórmula exprime simultaneamente a parametrização, o jacobiano orientado e a independência da escolha de coordenadas.

Exemplo 16.1 (Integral de volume). Para $\omega = f \operatorname{vol}_g$,

$$\int_M \omega = \int_M f \operatorname{vol}_g,$$

e numa carta orientada

$$\int_M f \operatorname{vol}_g = \int f(x) \sqrt{|g(x)|} dx^1 \cdots dx^m.$$

Exemplo 16.2 (Fluxo em $\mathbb{R}^3$). Ao campo $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$ associa-se a 2-forma

$$\omega_\Phi := \Phi^1 dy \wedge dz + \Phi^2 dz \wedge dx + \Phi^3 dx \wedge dy.$$

Se $S = F(U)$ é uma superfície orientada,

$$\int_S \omega_\Phi = \int_U \Phi(F(u, v)) \cdot (F_u \times F_v) du dv,$$

isto é, o fluxo orientado de Φ através de S .

16.2 Teorema de Stokes

Teorema 16.3 (Stokes). *Seja M uma variedade orientada de dimensão m , com bordo suave (ou regular por partes), e seja $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ de classe C^1 , com suporte compacto. Então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega,$$

onde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ é a inclusão canônica e ∂M possui a orientação induzida.

Nota 16.4 (Inclusão e orientação induzida). A inclusão ι envia cada ponto $p \in \partial M$ para o mesmo ponto de M . O seu *pullback* restringe uma forma aos vetores tangentes à fronteira:

$$(\iota^* \omega)_p(v_1, \dots, v_{m-1}) = \omega_p(d\iota_p v_1, \dots, d\iota_p v_{m-1}).$$

Por se tratar da inclusão, identificamos $d\iota_p v_j = v_j \in T_p M$. A orientação da fronteira obedece à convenção *normal exterior primeiro*: uma base $(v_1, \dots, v_{m-1})$ de $T_p \partial M$ é positiva quando $(\nu_{\text{ext}}, v_1, \dots, v_{m-1})$ é uma base positiva de $T_p M$, para qualquer vetor transversal ν_{ext} dirigido para o exterior. Se existe uma métrica, pode escolher-se a normal exterior unitária; a orientação não depende dessa escolha métrica.

Exemplo 16.5 (Orientação do círculo como fronteira do disco). No disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, orientado por $dx \wedge dy$, a parametrização $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ possui tangente $T = (-\sin \theta, \cos \theta)$ e normal exterior $\nu_{\text{ext}} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Como $\det(\nu_{\text{ext}}, T) = 1$, a orientação induzida de ∂D é anti-horária. Esta é a orientação usada no teorema de Green.

Demonstração. Etapa 1: teorema de Stokes num retângulo. Consideremos o retângulo orientado da maneira habitual

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m, \quad \text{vol} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Toda $(m-1)$ -forma ω pode escrever-se, de modo único, como

$$\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m.$$

O chapéu indica a omissão do fator correspondente. Ao derivar o termo de índice i , só a derivada em x^i sobrevive: as restantes contêm duas vezes o mesmo diferencial. Como

$$dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m = (-1)^{i-1} \text{vol},$$

os dois sinais cancelam-se e obtemos

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^m \partial_i \omega_i \right) \text{vol}.$$

Denotemos por $R_i = \prod_{j \neq i} [a_j, b_j]$ o produto das outras coordenadas e por $dx^{\widehat{i}}$ o produto dos seus diferenciais na ordem crescente. O teorema de Fubini e o teorema fundamental do cálculo dão

$$\begin{aligned} \int_R \partial_i \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m &= \int_{R_i} \left(\int_{a_i}^{b_i} \partial_i \omega_i dx^i \right) dx^{\widehat{i}} \\ &= \int_{R_i} [\omega_i(x^1, \dots, b_i, \dots, x^m) - \omega_i(x^1, \dots, a_i, \dots, x^m)] dx^{\widehat{i}}. \end{aligned}$$

É essencial verificar os sinais nas duas faces. Na face $x^i = b_i$, a normal exterior é $+\partial_i$, pelo que a orientação induzida corresponde a $(-1)^{i-1}dx^{\widehat{i}}$. Na face $x^i = a_i$, a normal exterior é $-\partial_i$ e a orientação induzida corresponde a $(-1)^i dx^{\widehat{i}}$. Como a restrição de ω a ambas as faces só conserva a parcela de índice i , obtém-se

$$\int_{\{x^i=b_i\}} \omega = \int_{R_i} \omega_i(\dots, b_i, \dots) dx^{\widehat{i}}, \quad \int_{\{x^i=a_i\}} \omega = - \int_{R_i} \omega_i(\dots, a_i, \dots) dx^{\widehat{i}}.$$

As faces de dimensão inferior não contribuem para os integrais. Somando em $i = 1, \dots, m$, concluímos

$$\boxed{\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega.}$$

Etapa 2: passagem a um domínio parametrizado. Se $F : R \rightarrow S = F(R)$ é um difeomorfismo suave de variedades com bordo sobre a sua imagem, que preserva as orientações, então a naturalidade da diferencial exterior, $F^*d = dF^*$, e a compatibilidade da parametrização com as fronteiras implicam

$$\int_S d\omega = \int_R F^*(d\omega) = \int_R d(F^*\omega) = \int_{\partial R} F^*\omega = \int_{\partial S} \iota^*\omega.$$

A última igualdade utiliza $F(\partial R) = \partial S$ e a orientação de bordo transportada por F . Esta etapa não afirma que uma variedade geral seja a imagem de um único retângulo.

Etapa 3: passagem a uma variedade geral. Escolhemos um atlas de cartas orientadas de M adaptadas ao bordo: nos pontos interiores as cartas tomam valores em abertos de $\mathbb{R}^m$, e perto da fronteira em abertos do semiespaço $\{x^1 \leq 0\}$, com ∂M descrita localmente por $x^1 = 0$. Seja (ρ_α) uma partição da unidade subordinada ao atlas; como ω tem suporte compacto, apenas um número finito de parcelas $\rho_\alpha\omega$ são relevantes depois de escolhermos uma subcobertura finita do suporte. Temos

$$\omega = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\omega, \quad d\omega = \sum_{\alpha} d(\rho_{\alpha}\omega).$$

Cada parcela tem suporte contido numa carta e a sua representação em coordenadas pode ser tratada pelo cálculo da primeira etapa: integrando num retângulo maior, as faces artificiais não contribuem porque a parcela se anula numa vizinhança delas. Nas cartas de bordo, resta unicamente a face $x^1 = 0$, cujo sinal é precisamente o da orientação induzida. Portanto,

$$\int_M d(\rho_{\alpha}\omega) = \int_{\partial M} \iota^*(\rho_{\alpha}\omega).$$

Somando estas igualdades e usando a linearidade dos integrais e a partição da unidade, segue

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega.$$

Para fronteiras regulares por partes, aplica-se o mesmo argumento em cada peça suave; as intersecções entre peças, de dimensão inferior, não contribuem. Isto conclui a demonstração. $\square$

16.3 Teoremas clássicos como casos particulares

O teorema geral de Stokes unifica várias fórmulas fundamentais do cálculo: em cada caso, escolhe-se uma forma de grau adequado e calcula-se a sua diferencial exterior.

Corolário 16.6 (Teorema fundamental do cálculo). *Para $f \in C^1([a, b])$,*

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração. O intervalo $M = [a, b]$ tem orientação dx e fronteira orientada $\partial M = \{b\} - \{a\}$. Uma função f é uma 0-forma, com $df = f'(x) dx$. Por Stokes,

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_M df = \int_{\partial M} f = f(b) - f(a).$$

Aqui, integrar uma 0-forma numa variedade orientada de dimensão zero significa somar os seus valores com os sinais da orientação. $\square$

Corolário 16.7 (Green). *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ uma região compacta orientada com bordo regular por partes e sejam $P, Q \in C^1$ numa vizinhança de A . Então*

$$\oint_{\partial A} P dx + Q dy = \iint_A (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy.$$

Demonstração. Tomemos a 1-forma $\omega = P dx + Q dy$. Como $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ e $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$,

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy \\ &= (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

A identidade de Stokes fornece $\int_{\partial A} \iota^* \omega = \int_A d\omega$, que é exatamente a fórmula enunciada. A fronteira recebe a orientação induzida por $dx \wedge dy$; para o disco esta é anti-horária. $\square$

Corolário 16.8 (Stokes clássico em $\mathbb{R}^3$). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientada com bordo regular por partes e $W = (P, Q, R)$ um campo C^1 numa vizinhança de S . Então*

$$\oint_{\partial S} W \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{curl } W \cdot \mathbf{n} dS.$$

Demonstração. Associemos ao campo W a 1-forma $\omega = W^\flat = P dx + Q dy + R dz$. A sua diferencial exterior é

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Os três coeficientes são as componentes do rotacional $\text{curl } W$. Se $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização orientada, então

$$F^*(d\omega) = \text{curl } W(F(u, v)) \cdot (F_u \times F_v) du \wedge dv,$$

de modo que $\int_S d\omega = \int_S \text{curl } W \cdot \mathbf{n} dS$. Por outro lado, numa parametrização positiva γ de um arco de ∂S , temos $\gamma^* \omega = W(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, e portanto $\int_{\partial S} \iota^* \omega = \oint_{\partial S} W \cdot d\mathbf{r}$. Aplicando Stokes, obtemos a tese. $\square$

Corolário 16.9 (Teorema da divergência de Gauss–Ostrogradsky). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira regular por partes e $W = (P, Q, R)$ um campo C^1 numa vizinhança de $\bar{\Omega}$.*

Se n é a normal exterior,

$$\int_{\partial\Omega} W \cdot n \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} W \, dV.$$

Demonstração. Consideremos a 2-forma de fluxo

$$\omega = P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \iota_W(dx \wedge dy \wedge dz).$$

Então

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= (P_x + Q_y + R_z) \, dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} W) \, dV. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos as identidades $dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$. Numa parametrização orientada F de $\partial\Omega$,

$$F^*\omega = W(F(u, v)) \cdot (F_u \times F_v) \, du \wedge dv.$$

Pela orientação induzida, $F_u \times F_v$ aponta para o exterior, de modo que $\int_{\partial\Omega} \iota^*\omega = \int_{\partial\Omega} W \cdot n \, dS$. Stokes implica a identidade anunciada. $\square$

Nota 16.10 (Unificação dos teoremas integrais). Todos os resultados anteriores são casos particulares da fórmula de Stokes

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega,$$

onde $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ é a inclusão canónica e $\iota^*\omega$ a restrição da forma aos vetores tangentes ao bordo. Em dimensão três, para uma função suave f e um campo vetorial X , as identidades estabelecidas na Secção 15.6 são

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp, \quad \operatorname{curl} X = (*dX^\flat)^\sharp, \quad \operatorname{div} X = *d * X^\flat.$$

A última identidade resulta ainda do Exemplo 15.19, pois $d(*X^\flat) = (\operatorname{div} X) \operatorname{vol}$ e $*\operatorname{vol} = 1$. Por conseguinte, o gradiente, o rotacional e a divergência correspondem à mesma operação d aplicada a formas de graus sucessivos,

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3).$$

Em particular, $d^2 = 0$ implica $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0$ e $\operatorname{div}(\operatorname{curl} X) = 0$. Green, Stokes clássico e Gauss–Ostrogradsky são, portanto, manifestações integrais da mesma estrutura exterior.

16.4 Variação de integrais sobre domínios e superfícies móveis

As integrais sobre conjuntos em movimento surgem na mecânica dos meios contínuos e no transporte de grandezas geométricas. A fórmula fundamental é válida para formas diferenciais de qualquer grau; o teorema de Reynolds, para integrais volumétricas, e a fórmula de transporte de fluxos, para hiper-superfícies, serão consequências distintas dessa identidade.

Teorema 16.11 (Transporte de formas diferenciais). *Seja N uma variedade suave, M uma variedade compacta orientada de dimensão m (eventualmente com bordo), e $F_t : M \rightarrow N$ uma família suave de mergulhos que preservam a orientação transportada. Seja V_t um campo definido numa vizinhança de $S(t) = F_t(M)$, tal que $\partial_t F_t = V_t \circ F_t$, e seja ω_t uma família suave de*

m -formas em N . Então

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \omega_t = \int_{S(t)} (\partial_t \omega_t + \mathcal{L}_{V_t} \omega_t).$$

Pela fórmula de Cartan e pelo teorema de Stokes, é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \omega_t = \int_{S(t)} (\partial_t \omega_t + \iota_{V_t} d\omega_t) + \int_{\partial S(t)} \iota_{V_t} \omega_t.$$

Demonstração. Pela definição de integração de formas, o domínio de integração pode ser fixado por meio do *pullback*:

$$I(t) = \int_{S(t)} \omega_t = \int_M F_t^* \omega_t.$$

A suavidade e a compacidade permitem derivar sob o sinal de integral. A fórmula de derivação do *pullback* (Capítulo 13) fornece

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega_t = F_t^* (\partial_t \omega_t + \mathcal{L}_{V_t} \omega_t).$$

Integrando, obtemos a primeira identidade. A fórmula de Cartan $\mathcal{L}_V \omega = d(\iota_V \omega) + \iota_V(d\omega)$ dá

$$I'(t) = \int_{S(t)} (\partial_t \omega_t + \iota_{V_t} d\omega_t) + \int_{S(t)} d(\iota_{V_t} \omega_t).$$

A última parcela é $\int_{\partial S(t)} \iota_{V_t} \omega_t$ pelo teorema de Stokes, com a orientação induzida. Isto conclui a demonstração. $\square$

Teorema 16.12 (Transporte de Reynolds em $\mathbb{R}^n$). *Seja $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de fronteira regular, cujo fecho é transportado pelo fluxo suave de $V(t, x)$ e seja $f(t, x)$ uma função suave. Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f \, dx = \int_{\Omega(t)} [\partial_t f + \operatorname{div}(fV)] \, dx = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} V \right] \, dx,$$

onde $\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + V \cdot \nabla f$. Equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f \, dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t f \, dx + \int_{\partial \Omega(t)} f V \cdot n \, dS.$$

Demonstração. Aplicamos o teorema anterior à n -forma $\omega = f \operatorname{vol}$, onde $\operatorname{vol} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Como $\mathcal{L}_V \operatorname{vol} = (\operatorname{div} V) \operatorname{vol}$, pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(f \operatorname{vol}) &= (V \cdot \nabla f) \operatorname{vol} + f \mathcal{L}_V \operatorname{vol} \\ &= [V \cdot \nabla f + f \operatorname{div} V] \operatorname{vol} = \operatorname{div}(fV) \operatorname{vol}. \end{aligned}$$

O resultado segue integrando $\partial_t \omega + \mathcal{L}_V \omega$. Pela fórmula da divergência, $\int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(fV) \, dx = \int_{\partial \Omega(t)} f V \cdot n \, dS$, o que fornece a expressão de fronteira. $\square$

Nota 16.13 (Importância do teorema de Reynolds na mecânica dos meios contínuos). O teorema de Reynolds é uma ferramenta central na mecânica dos meios contínuos: permite passar de balanços integrais sobre volumes materiais em movimento a equações locais de conservação.

Para a densidade de massa ρ e a velocidade material V , a conservação da massa de cada domínio material $\Omega(t)$ escreve-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \, dx = 0.$$

Pela fórmula de Reynolds, obtém-se $\int_{\Omega(t)} [\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V)] \, dx = 0$. Como a identidade vale para qualquer volume material suficientemente regular, resulta a equação local de continuidade

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0.$$

O mesmo princípio fundamenta a localização dos balanços de quantidade de movimento, momento angular e energia, depois de incluídas as respetivas forças, tensões e fluxos. Convém distinguir um *volume material*, cuja fronteira se move com V , de um *volume de controlo*, cuja fronteira pode ter outra velocidade; neste último caso, surge o fluxo relativo através da fronteira. A formulação geométrica em termos de derivada de Lie evidencia a origem comum destas identidades de transporte.

Teorema 16.14 (Transporte de fluxo através de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$). *Seja $S(t) \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície compacta, orientada, possivelmente com bordo, transportada por um campo suave V . Seja $\Phi(t, x)$ um campo vetorial suave e ν a normal unitária orientada. Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \Phi \cdot \nu \, dS = \int_{S(t)} [\partial_t \Phi + [V, \Phi] + (\operatorname{div} V) \Phi] \cdot \nu \, dS,$$

onde o colchete de Lie dos campos vetoriais é

$$[V, \Phi] = (V \cdot \nabla) \Phi - (\Phi \cdot \nabla) V.$$

Demonstração. À hipersuperfície orientada associamos a $(n-1)$ -forma $\omega = \iota_\Phi \operatorname{vol}$. Pela Proposição 15.20, a sua integral é exatamente o fluxo $\int_{S(t)} \Phi \cdot \nu \, dS$. Usando a identidade $[\mathcal{L}_V, \iota_\Phi] = \iota_{[V, \Phi]}$ da Proposição 13.45 e $\mathcal{L}_V \operatorname{vol} = (\operatorname{div} V) \operatorname{vol}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \omega &= \mathcal{L}_V (\iota_\Phi \operatorname{vol}) \\ &= \iota_{[V, \Phi]} \operatorname{vol} + \iota_\Phi (\mathcal{L}_V \operatorname{vol}) \\ &= \iota_{[V, \Phi] + (\operatorname{div} V) \Phi} \operatorname{vol}. \end{aligned}$$

Além disso, $\partial_t \omega = \iota_{\partial_t \Phi} \operatorname{vol}$, pois a forma de volume euclidiana é independente do tempo. Aplicamos a fórmula de transporte de formas diferenciais e interpretamos de novo a integral da $(n-1)$ -forma como fluxo, obtendo a tese. Esta demonstração é válida em qualquer dimensão e não utiliza produtos vetoriais. $\square$

Nota 16.15 (Variação do elemento de área orientado). A fórmula anterior distingue-se de Reynolds porque o vetor $\nu \, dS$ muda não só de magnitude mas também de direção. Em termos de uma parametrização material F_t , a derivada da área orientada é representada pela ação $(\operatorname{div} V)I - (DV)^T$ sobre o vetor normal de área, o que produz, no integrando, o termo $-(\Phi \cdot \nabla) V$. Esta identidade pode igualmente ser deduzida derivando os menores de ordem $n-1$ de DF_t .

Corolário 16.16 (Expressão clássica do transporte de fluxo em $\mathbb{R}^3$). *Em dimensão três, a*

fórmula de transporte de fluxo escreve-se

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \Phi \cdot n \, dS = \int_{S(t)} [\partial_t \Phi + V \operatorname{div} \Phi - \operatorname{curl}(V \times \Phi)] \cdot n \, dS.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \Phi \cdot n \, dS = \int_{S(t)} (\partial_t \Phi + V \operatorname{div} \Phi) \cdot n \, dS - \int_{\partial S(t)} (V \times \Phi) \cdot \tau \, ds,$$

onde τ é a tangente unitária orientada da fronteira.

Demonstração. A identidade vetorial

$$\operatorname{curl}(V \times \Phi) = V \operatorname{div} \Phi - \Phi \operatorname{div} V + (\Phi \cdot \nabla) V - (V \cdot \nabla) \Phi$$

permite substituir $[V, \Phi] + (\operatorname{div} V) \Phi$ por $V \operatorname{div} \Phi - \operatorname{curl}(V \times \Phi)$. A segunda expressão resulta do teorema clássico de Stokes aplicado ao campo $V \times \Phi$. O produto vetorial e o rotacional aqui utilizados são operações próprias da dimensão três. $\square$

Corolário 16.17 (Fluxo através da fronteira de um domínio móvel). *Se $S(t) = \partial\Omega(t)$, com a normal exterior, então*

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \Phi \cdot \nu \, dS = \int_{S(t)} (\partial_t \Phi + V \operatorname{div} \Phi) \cdot \nu \, dS.$$

Demonstração. Pelo teorema da divergência, $\int_{S(t)} \Phi \cdot \nu \, dS = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \Phi \, dx$. Aplicando Reynolds ao campo escalar $f = \operatorname{div} \Phi$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \Phi \cdot \nu \, dS &= \int_{\Omega(t)} [\partial_t \operatorname{div} \Phi + \operatorname{div}(V \operatorname{div} \Phi)] \, dx \\ &= \int_{S(t)} (\partial_t \Phi + V \operatorname{div} \Phi) \cdot \nu \, dS. \end{aligned}$$

Para a segunda passagem, aplicou-se novamente a divergência, incluindo ao campo $\partial_t \Phi$. Em particular, se $\operatorname{div} \Phi = 0$ e $\partial_t \Phi = 0$, o fluxo através da superfície fechada é constante (e, de facto, nulo em cada instante). $\square$

Nota 16.18 (Reynolds e transporte de fluxos). As fórmulas distinguem-se pelo grau da forma integrada: Reynolds corresponde à n -forma f vol num domínio $\Omega(t)$; o transporte de fluxo corresponde à $(n-1)$ -forma ι_Φ vol numa hipersuperfície $S(t)$. Ambas provêm do operador $\partial_t + \mathcal{L}_V$ e da mesma fórmula de transporte geométrico. Reservamos a notação $\Omega(t)$ aos domínios volúmetricos e $S(t)$ às superfícies ou hipersuperfícies.

Notas históricas e bibliográficas

Nota bibliográfica

O teorema de Stokes reúne numa única identidade o teorema fundamental do cálculo, Green, Stokes clássico e Gauss–Ostrogradsky. A formulação em termos de formas diferenciais torna explícita a estrutura comum: integração no bordo e diferenciação exterior são operações duais.

Referências do capítulo

Nota bibliográfica

- S. G. Krantz e H. R. Parks, *Geometric Integration Theory*, Birkhäuser, 2008.
M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994.
M. E. Gurtin, E. Fried e L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, 2010.
E. B. Tadmor, R. E. Miller e R. S. Elliott, *Continuum Mechanics and Thermodynamics: From Fundamental Concepts to Governing Equations*, Cambridge University Press, 2012.

Bibliografia geral

As referências seguintes reúnem os principais textos de apoio utilizados ao longo destas notas. As referências históricas e específicas de cada assunto encontram-se igualmente nas notas bibliográficas dos respetivos capítulos.

Curvas, superfícies e geometria diferencial clássica

Nota bibliográfica

M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2.^a ed. revista, Dover, 2016.
M. Umehara e K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, 2017.
C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010.
B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.
V. I. Arnold, “Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications”, *Advances in Soviet Mathematics*, 21 (1994), 33–91.

Variedades, geometria riemanniana e topologia

Nota bibliográfica

M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2.^a ed., Springer, 2013.
J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
J. R. Munkres, *Topology*, 2.^a ed., Prentice Hall, 2000.
B. Dubrovin, A. Fomenko e S. Novikov, *Modern Geometry — Methods and Applications*, Springer.

Formas diferenciais, cálculo exterior e integração

Nota bibliográfica

M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994.
Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, 1968.
S. G. Krantz e H. R. Parks, *Geometric Integration Theory*, Birkhäuser, 2008.

Mecânica dos meios contínuos e termodinâmica

Nota bibliográfica

M. E. Gurtin, E. Fried e L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, 2010.

E. B. Tadmor, R. E. Miller e R. S. Elliott, *Continuum Mechanics and Thermodynamics: From Fundamental Concepts to Governing Equations*, Cambridge University Press, 2012.